Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Lösungsskizze zu Blatt 10

Aufgabe 1. Es gilt

$\det(A) = 1\cdot(-1)\cdot 5+2\cdot(-1)\cdot 3+3\cdot 2\cdot 2-3\cdot(-1)\cdot 3-2\cdot(-1)\cdot 1-4\cdot 2\cdot 2 = -3.$

Also ist A invertierbar. Es gilt

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -11 & -5 & 7 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Das ergibt sich sowohl aus der Cramerschen Regel, als auch aus dem Gauss-Algorithmus, der in dieser Lösungsskizze aber nicht ausgeführt wird.

Aufgabe 2. Aus der Formel $\det(A) = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_j \lambda_{\sigma(j),j}$ ersieht man, daß Matrizen mit ganzahligen Einträgen ganzahlige Determinante haben. Das wenden wir wiederholt an:

„$\Rightarrow$" Seien $\mu_{ij} \in \mathbb{Z}$. Aus $E = AB$ ergibt sich

$$1 = \det(E) = \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Da $\det(A), \det(B) \in \mathbb{Z}$ muß $\det(A) \in \mathbb{Z}$ eine Einheit sein. Nun gilt aber $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$.

„$\Leftarrow$" Sei $\det(A) = \pm 1$. Offenbar hat die Kofaktormatrix $C = ((-1)^{i+j}\det(A^{ij}))$ ganzzahlige Einträge. Nach der Cramerschen Regel

$$B = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

muß auch B ganzzahlige Einträge haben.

Aufgabe 3. Nach der Cramerschen Regel gilt $A^tC = \det(A)E$. Es gilt

$$\det(AC^t) = \det(A)\det(C^t) = \det(A)\det(C)$$

und

$$\det(\det(A)E) = \det(A)^n \det(E) = \det(A)^n.$$

Folglich $\det(A)\det(C) = \det(A)^n$. Ist $\det(A) \neq 0$, liefert kürzen $\det(C) = \det(A)^{n-1}$. Sei nun $\det(A) = 0$, also A nicht invertierbar. Da $n \geq 2$, reicht es zu zeigen, daß C nicht invertierbar ist. Angenommen, C wäre invertierbar. Dann ist auch C^t invertierbar. Nach der Cramerschen Regel gilt $AC^t = 0$, folglich $A = 0$. Da $n \geq 2$ ist dann auch die Kofaktormatrix $C = 0$, Widerspruch.

Aufgabe 4. Induktion nach $n \geq 2$. Offenbar ist

$$\det(\begin{pmatrix} t & a_0 \\ -1 & t + a_1 \end{pmatrix} = t(t + a_1) + a_0 = t^2 + a_1 t + a_0.$$

Sei nun $n \geq 2$, und die Behauptung sei wahr für $n - 1$. Laplace-Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned}
\det(A) &= t \det \begin{pmatrix} t & & & \alpha_1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & \\ & & -1 & t + \alpha_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^n a_0 \det \begin{pmatrix} -1 & t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & t \\ & & & -1 \end{pmatrix} \\
&= t(t^{n-1} + \alpha_{n-1} t^{n-2} + \ldots + \alpha_1) + (-1)^n a_0 (-1)^n \\
&= t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \ldots + \alpha_0,
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt.