

Übungen zur Linearen Algebra I

Lösungsskizze zu Blatt 9

Aufgabe 1. Zu zeigen: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} v & w \\ x & y \end{pmatrix}$. Also

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det \begin{pmatrix} av + bx & aw + by \\ cv + dx & cw + dy \end{pmatrix} \\ &= (av + bx)(cw + dy) - (cv + dx)(aw + by) \\ &= avdy + bxcw - cvby - dxaw\end{aligned}$$

und

$$\det(A)\det(B) = (ad - bc)(vy - wx) = advy - adwx - bcvy + bcwx.$$

Offenbar stimmen diese Ergebnisse überein.

Aufgabe 2. Wähle als Basis die Standardbasis

$$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \in \text{Mat}(2, K) = V$$

und schreibe $A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$. Gemäß den Multiplikationsregeln gilt

$$\begin{aligned}AE_{11} &= aE_{11} + cE_{21}, & E_{11}A &= aE_{11} + bE_{12}, \\ AE_{12} &= aE_{12} + cE_{22}, & E_{12}A &= cE_{11} + dE_{12}, \\ AE_{21} &= bE_{11} + dE_{21}, & E_{21}A &= aE_{21} + bE_{22}, \\ AE_{22} &= bE_{11} + dE_{22}, & E_{22}A &= cE_{21} + dE_{22}.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & b \\ -b & a-d & 0 & 0 \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix von f bezüglich der Basis $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$.

Aufgabe 3. Es gilt $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{n+1}$. Beweis durch vollständige Induktion. Induktionsanfang $n = 1$: Dann ist $\sigma = \text{id}$, und es gilt $\text{sgn}(\text{id}) = 1$. Induktionsschritt: Sei nun $n \geq 2$, und die Behauptung gelte bereits für $n - 1$. Betrachte die Transposition $\tau \in S_n$, welche $1, n$ vertauscht. Dann ist

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n-1 & 1 & n \end{pmatrix}$$

Fassen wir $\tau\sigma$ als Permutation von $\{1, 2, \dots, n-1\}$ auf, so liefert die Induktionshypothese $\text{sgn}(\tau)\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\tau\sigma) = (-1)^n$. Da $\text{sgn}(\tau) = -1$ folgt $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{n+1}$.

Aufgabe 4. (i) U'' ist als Durchschnitt von Untervektorräumen wieder ein Untervektorraum. Sei nun $\lambda \in K$ und $x, y \in U'$, etwa $f^i(x) = 0$ und $f^j(y) = 0$. Wähle ein $n \geq i, j$. Dann ist $f^n(x) = f^{n-i}(f^i(x)) = 0$, und ebenso $f^n(y) = 0$. Also $x, y \in \ker(f^n)$, somit $x + \lambda y \in \ker(f^n) \subset U'$. Somit ist auch die Vereinigungsmenge U' ein Untervektorraum.

(ii) Wir nutzen folgende Beobachtung aus: Die $\ker(f^i) \subset V$ bilden eine aufsteigende Folge von Untervektorräumen. Dann gilt $\ker(f^m) = \ker(f^{m+1}) = \dots$ für ein $m \geq 0$, da V endlich-dimensional ist. Die $\text{im}(f^i) \subset V$ bilden eine absteigende Kette von Untervektorräumen, und es gilt entsprechen $\text{im}(f^n) = \text{im}(f^{n+1}) = \dots$ für ein $n \geq 0$. Ohne Einschränkung sei $m = n$. Dann gilt insbesondere $U' = \ker(f^m)$ und $U'' = \text{im}(f^m)$.

Sei nun $x \in U' \cap U''$. Es gilt also $x = f^m(y)$ für ein $y \in V$. Dann $0 = f^m(x) = f^{2m}(y)$. Da $\ker(f^{2m}) = \ker(f^m)$ folgt $x = f^m(y) = 0$.

Sei nun $x \in V$. Da $\text{im}(f^m) = \text{im}(f^{2m})$ ist $f^m(x) = f^{2m}(y)$ für ein $y \in V$. Betrachte die Zerlegung

$$x = (x - f^m(y)) + f^m(y).$$

Offenbar ist $x' = x - f^m(y) \in \ker(f^m) = U'$ und $f^m(y) \in \text{im}(f^m) = U''$.

Aufgabe 1*.

Aufgabe 2*. Seien $A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ & \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$. Offenbar sind A, B zueinander konjugiert genau dann, wenn es ein invertierbares $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gibt mit $SA = BS$. Matrizenmultiplikation liefert

$$SA = \begin{pmatrix} b & -1 \\ d & -c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad BS = \begin{pmatrix} ia & ib \\ -ic & -id \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung $SA = BS$ gilt also genau dann, wenn

$$b = ia, \quad -a = ib, \quad d = -ic, \quad -c = -id.$$

Letzteres gilt beispielsweise für $a = 1, b = i, c = 1, d = -i$. Für diese Einträge ist $\det(S) = ad - bc = -2i \neq 0$, also ist so ein S auch invertierbar.

Aufgabe 3*. Sei $x_1, \dots, x_m \in V$ eine Basis, und I die Menge aller Abbildungen

$$i : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, m\}.$$

Diese Menge ist endlich und enthält m^n Elemente. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\psi : \text{Mult}_n(V, K) \longrightarrow K^I, \quad f \longmapsto (i \mapsto f(x_{i(1)}, \dots, x_{i(n)}).$$

Es reicht zu zeigen, daß die Abbildung injektiv ist. Sei $f \in \ker(\psi)$. Seien $y_1, \dots, y_n \in V$. Schreibe $y_l = \sum_{i(l)=1}^n \lambda_{i(l),l} x_{i(l)}$. Wegen der Multilinearität gilt

$$f(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i \in I} \prod_{j=1}^n \lambda_{i(j),j} f(x_{i(1)}, \dots, x_{i(n)}) = 0.$$

Somit ist ψ injektiv.

Aufgabe 4*. Ist A eine obere Dreiecksmatrix, so wähle $X = A$ und $Y = E$. Sei nun $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & -a/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b - da/c \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Als Produkt von invertierbaren Matrizen ist dies invertierbar, also $c' = b - ad/c \neq 0$. Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1/c' & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}$ ergibt $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Existenz der Zerlegung ergibt sich nun daraus, daß Produkte und Inverse von oberen Dreiecksmatrizen wieder obere Dreiecksmatrizen sind.

Angenommen, die beiden Alternativen gelten gleichzeitig. Dann ist

$$U^{-1}XYV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und das müßte ein obere Dreiecksmatrix sein, Widerspruch.