Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Lösungsskizze zu Blatt 8

Aufgabe 1. Es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -30 & 18 \\ -3 & 22 & -13 \end{pmatrix}$$

Das Gauss-Verfahren zur Berechnung schreibe ich hier nicht auf, gehört aber zur Aufgabenlösung.

Aufgabe 2. Linearität rechne ich hier nicht nach, gehört aber zur Aufgabenlösung. Bezüglich den beiden Standardbasen $1, X, X^2, X^3, X^4 \in V$ sowie $(1,0), (0,1) \in K^2$ ist die Matrix von f

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat Rang zwei, ihr Kern ist somit 3-dimensional. Eine Basis des Kerns ist etwa $X^2 - 1, X^3 - 1, X^4 - 1$.

Aufgabe 3. Da A invertierbar ist, muss die ganze Zahl $ad - bc$ nicht verschwinden. Seien $p_1, \ldots, p_n$ die Primfaktoren, die in der Primfaktorzerlegung von $ad-bc$ auftauchen. Alle übrigen Primzahlen p teilen dann $ad-bc$ nicht, folglich ist $[a][d] - [b][c] = [ad - bc] \neq 0$ in $\mathbb{F}_p$. Nach Satz der Vorlesung ist dann $A_p \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{F}_p)$ invertierbar.

Aufgabe 4. (i) Wähle $A = B$.

(i) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Da in jedem Körper $0 \neq 1$, gilt $AB \neq BA$.

(iii) „$\Leftarrow$": $B\lambda E = \lambda BE = \lambda B = \lambda EB$.

"$\Rightarrow$": Es gelte $AB = BA$ für alle $n \times n$-Matrizen B. Schreibe $A = \sum \lambda_{ij} E_{ij}$ als Linearkombination in der Standardbasis $E_{ij} \in \mathrm{Mat}(n, K)$. Für $1 \leqslant a, b \leqslant n$ gilt dann

$$\sum_i \lambda_{ia} E_{ib} = \sum_{ij} \lambda_{ij} E_{ij} \cdot E_{ab} = E_{ab} \cdot \sum_{ij} \lambda_{ij} E_{ij} = \sum_j \lambda_{bj} E_{aj},$$

gemäß der Multiplikationsregel für die E_{ij}. Es folgt $\lambda_{ia} = 0$ für $i \neq a$, da die $E_{ij} \in \mathrm{Mat}(n, K)$ Basis sind. Somit ist $A = \sum_i \lambda_{ii} E_{ii}$ eine Diagonalmatrix.

Obige Gleichung reduziert sich zu $\lambda_{aa} E_{ab} = \lambda_{bb} E_{ab}$. Da dies für alle a, b gilt, muss $\lambda_{11} = \ldots = \lambda_{nn}$ gelten. Bezeichnen wir dieses Skalar mit λ, so gilt also $A = \lambda E$.