Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Lösungsskizze zu Blatt 7

Aufgabe 1. Man kann etwa folgende elementare Zeilentransformationen durchführen (bei den abgegebenen Loesungen muss die Art der Zeilentransformation angegeben sein):

$$\begin{pmatrix}4&8&3&24\\1&2&3&9\\2&4&0&10\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&9\\4&8&3&24\\2&4&0&10\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&9\\0&0&-9&-12\\0&0&-6&-8\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&9\\0&0&-9&-12\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&0&5\\0&0&-9&-12\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Der Rang ist somit 2, und eine Basis des Kerns ist

$$b_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad b_3=\begin{pmatrix}-5\\0\\-4/3\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. „$\Rightarrow$": Sei $f:V\to W$ linear. Dann ist $f(0)=0$, also $(0,0)\in\Gamma_f\neq\emptyset$. Sei nun $\lambda\in K$ ein Skalar, und seien $x=(x_1,x_2)$ und $y=(y_1,y_2)$ zwei Vektoren aus Γ_f. Dann ist also $x_1,y_1\in V$ und $x_2=f(x_1)$, $y_2=f(y_1)$. Wegen Linearität gilt $f(x_1+\lambda x_2)=f(x_1)+\lambda f(x_2)=x_2+\lambda y_2$, somit ist $(x_1,x_2)+\lambda(y_1,y_2)=(x_1+\lambda y_1,x_2+\lambda y_2)\in\Gamma_f$.

„$\Leftarrow$": Sei $\Gamma_f\subset V\times W$ Untervektorraum. Seien $x,y\in V$ und $\lambda\in K$. Dann sind $(x,f(x))$ und $(y,f(y))$ Vektoren aus Γ_f, somit auch

$$(x+\lambda y,f(x)+\lambda f(y))=(x,f(x))+\lambda(y,f(y))\in\Gamma_f.$$

Mit anderen Worten, $f(x+\lambda y)=f(x)+\lambda f(y)$.

Aufgabe 3. Offenbar ist die Abbildung

$$f:F\longrightarrow\mathbb{R}^2,\quad(a_n)\longmapsto(a_0,a_1)$$

linear. Es reicht zu zeigen, daß f bijektiv ist, denn dann gilt $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

,,injektiv": Sei (a_n) eine Fibonacci-Folge aus $\ker(f)$, also $a_0 = a_1 = 0$. Wir zeigen durch Induktion nach $n \geq 0$, daß $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$ gilt. Die Fälle $n = 0$, $n = 1$ sind trivial. Sei nun $n \geq 2$. Angenommen, es gelte bereits $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Dann ist $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = 0 + 0 = 0$.

,,surjektiv": Seien $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Wir müssen eine Fibonacci-Folge (a_n) mit $a_0 = \lambda$ und $a_1 = \mu$ finden. Wir definieren die Einträger a_n der gesuchten Fibonacci-Folge durch Induktion nach $n \geq 0$. Definiere $a_0 = \lambda$ und $a_1 = \mu$. Sei nun $n \geq 2$. Angenommen, wir haben $a_1, \ldots, a_{n-1}$ bereits definiert. Dann setzen wir $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Offenbar ist die so definierte Folge $(a_n) \in F$, und $f(a_n) = (\lambda, \mu)$.

Aufgabe 4. Offenbar ist der K-Vektorraum $\mathrm{Mat}(n, K)$ von Dimension n^2. Betrachte die Folge von Vektoren $A^0, A^1, A^2, \ldots \in \mathrm{Mat}(n, K)$. Angenommen, es wäre $A_m \notin \langle A^0, \ldots, A^{m-1} \rangle$ für alle $0 \leqslant m \leqslant n^2$. Nach Satz der Vorlesung und vollständige Induktion nach m folgt dann, daß $A^0, A^1, \ldots, A^{n^2}$ linear unabhängig wären. Folglich wäre die Dimension von $\mathrm{Mat}(n, K)$ mindestens $n^2 + 1$, Widerspruch. Folglich gilt $A_m \in \langle A^0, \ldots, A^{m-1} \rangle$ f"ur ein $m \leqslant n^2$, somit gibt es Skalare $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$ mit

$$-A^m = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i A^i,$$

und $A^m + \lambda^{m-1} A^{m-1} + \ldots + \lambda_0 E = 0$.