Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Lösungsskizze zu Blatt 6

Aufgabe 1.

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a & d\\ b & e\\ c & f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b & e\\ a & d\\ c & f\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & -x\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4-x\\ 3x & -x^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & -x\\ 0 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ x & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-x^2 & 6-3x\\ 2x & 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & x & -2 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\ -2\\ x\\ 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-4x\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\ -2\\ x\\ 7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & x & -2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 3x & -6 & 0\\ -2 & n-2x & 4 & 0\\ x & x^2 & -2x & 0\\ 7 & 7x & -14 & 0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Nach der Dimensionsformel gilt

$$\dim(U_1+U_2)+\dim(U_1\cap U_2)=n_1+n_2.$$

Gilt $n_1, n_2 > n/2$, so erhalten wir zusammen mit $\dim(U_1+U_2)\leqslant n$ die Abschätzung

$$\dim(U_1\cap U_2)=n_1+n_2-\dim(U_1+U_2)>n/2+n/2-n=0.$$

Folglich ist $U_1 \cap U_2 \neq 0$. Ist dagegen $n_1, n_2 < n/2$, so ergibt sich analog

$$\dim(U_1 + U_2) = n_1 + n_2 - \dim(U_1 \cap U_2) < n/2 + n/2 = n.$$

Nach Satz der Vorlesung muss dann $U_1 + U_2 \neq V$ sein.

Aufgabe 3. (i) Wir verifizieren zunächst die Linearität der formalen Ableitung $P \mapsto P'$: Seien $P = \sum \lambda_n X^n$ und $Q = \sum \mu_n X^n$ und $\alpha \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\alpha P + Q)'(X) &= (\sum_{n \geq 0} (\alpha\lambda_n + \mu_n) X^n)' \\
&= \sum_{n \geq 1} n(\alpha\lambda_n + \mu_n) X^{n-1} \\
&= \alpha \sum_{n \geq 1} n\lambda_n X^{n-1} + \sum_{n \geq 1} n\mu_n X^{n-1} \\
&= \alpha P'(X) + Q'(X).
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Linearität von f. Seien nun $P, Q \in V_3$ und $\alpha \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(\alpha P + Q)(X) &= -(\alpha P + Q)'(X^2 + 1) \\
&= (-\alpha P' + Q')(X^2 + 1) \\
&= \alpha(-P'(X^2 + 1)) + (-Q'(X^2 + 1)) \\
&= (\alpha f(P) + f(Q))(X).
\end{aligned}$$

(ii) Am zweckmässigsten wählt man die beiden Standardbasen

$$1, X, X^2, X^3 \in V_3 \quad \text{und} \quad 1, X, X^2, X^3, X^4 \in V_4.$$

Dann gilt

$$f(1) = 0, \quad f(X) = -1, \quad f(X^2) = 2 - 2x^2, \quad f(X^3) = -3(X^2 - 1)^2 = -3 + 6X^2 - 3X^4.$$

Die Matrix von f bezüglich dieser Basen ist somit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Wir zeigen durch vollständige Induktion nach $r \geq 1$, daß die Einträge $\lambda_{ij}^{(r)}$ des r-fachen Matrizenprodukts A^r für $j \geq i-r+1$ verschwinden. Hierbei steht in $\lambda_{ij}^{(r)}$ der obere Index in Klammern, um den Ausdruck von der r-fachen Potenz zu unterscheiden. Da jedes Indexpaar $1 \leqslant i, j \leqslant n$ die Bedingung $j \geq i-n+1$ erfüllt, impliziert der Fall $r = n$ die gesuchte Aussage $A^n = 0$.

Induktionsanfang „$r = 1$": Die Aussage gilt offenbar für $r = 1$.

Induktionsschritt „$r - 1 \Rightarrow r$": Sei nun $r \geq 2$. Angenommen, die Behauptung gilt bereits für $r - 1$. Wegen $A^r = A^{r-1} \cdot A$ gilt dann

$$\lambda_{ij}^{(r)} = \sum_{s=1}^{n} \lambda_{is}^{(r-1)} \lambda_{sj}.$$

Nach Voraussetzung gilt $\lambda_{sj} = 0$ für $j \geq s$, und nach Induktionsannahme gilt $\lambda_{is}^{(r-1)} = 0$ für $s \geq i - (r-1) + 1 = i - r + 2$. Foglich

$$\lambda_{ij}^{(r)} = \sum_{s=j+1}^{i-r+1} \lambda_{is}^{(r-1)} \lambda_{sj}.$$

Für $j \geq i - r + 1$ ist dies die leere Summe, und dann gilt $\lambda_{ij}^{(r)} = 0$.