Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Lösungsskizze zu Blatt 5

Aufgabe 1. Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei K-Vektorräumen ist eine lineare Abbildung genau dann, wenn $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ für alle Vektoren $x, y \in V$ und alle Skalare $\lambda \in K$ gilt.

Aufgabe 2. (i) Die Polynome $1, X, X^2, X^3 \in V$ bilden eine Basis, und es gilt somit $\dim(V) = 4$.

„Erzeugendensystem": Jedes $f = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i X^i$ vom Grad $\deg(f) \leqslant 3$ ist offenbar Linearkombination von $1, X, X^2, X^3$.

„linear unabhängig" Sei $0 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i X^i$. Nach dem Prinzip des Koeffizientenvergleichs folgt dann $\lambda_1 = \ldots = \lambda_3 = 0$. Also sind die $1, X, X^2, X^3$ linear unabhängig.

(ii) Ausmultiplizieren ergibt $f_2 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$, und man ersieht

$$f_1 - f_2 + 6f_3 - 3f_4 = 0.$$

Da $1 \neq 0$ ist das eine nichttriviale Linearkombination, und die $f_1, \ldots, f_4$ sind linear abhängig.

(iii) Wähle $i = 2$. Die f_1, f_3, f_4 sind linear unabhängig: Angenommen $\lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$. Koeffizientenvergleich bei X^3 ergibt $\lambda_1 = 0$; Koeffizientenvergleich bei X^0 ergibt $\lambda_4 = 0$. Da $f_3 \neq 0$ folgt $\lambda_3 = 0$.

(iv) Es gilt $X^2 \notin \langle f_1, f_3, f_4 \rangle$. Grund: Wäre

$$X^2 = \lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4,$$

so liefert Koeffizientenvergleich bei X^2 die Bedingung $1 = -3\lambda_3$, und Koeffizientenvergleich bei X^3 die Bedingung $0 = \lambda_3$, mithin $1 = 0$, Widerspruch. Nach Satz sind $X^2, f_1, f_2, f_4 \in V$ linear unabhängig. Diese Vektoren lassen sich also zu einer Basis ergänzen. Da $\dim(V) = 4$ müssen Sie bereits selber eine Basis sein.

Aufgabe 3. Betrachte die Primfaktorzerlegungen:

$$7 = 7, \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 121 = 11^2, \quad 14 = 2 \cdot 7.$$

Für $p = 7$ gilt

$$([7], [30]) = (0, [2]) \quad \text{und} \quad ([121], [14]) = ([2], 0).$$

Ist $(a, b) \in \mathbb{F}_7^2$, so gilt $(a, b) = 4a([2], 0) + 4b(0, [2])$, und die Vektoren sind ein Erzeugendensystem.

Für $p = 2$ gilt

$$([7], [30]) = (1, 0) \quad \text{und} \quad ([121], [14]) = (1, 0),$$

diese Vektoren erzeugen offenbar den Untervektorraum aller $(a, 0)$, bilden somit kein Erzeugendensystem.

Aufgabe 4. Sei W zunächst unendlich-dimensional. Nach Vorlesung gibt es eine linear unabhängige unendliche Folge $x_1, x_2, \ldots \in V$. Betrachte die Untervektorräume

$$V_i = \langle x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots \rangle \quad \text{und} \quad U_i = \langle x_1, x_2, \ldots, x_i \rangle$$

Offenbar bilden die V_i eine absteigende Folge von paarweise verscheidenen Untervektorräumen, und die U_i eine aufsteigende Folge von paarweise verschiedenen Untervektorräumen. Das beweist die Implikationen $(ii) \Rightarrow (i)$ und $(iii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sei W endlich-dimensional. Setze $n = \dim(W)$ und $n_i = \dim(V_i)$. Dann gilt $n_j \geq n_{j+1}$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn $V_j = V_{j+1}$. Angenommen, es gibt unendlich viele j mit $V_j \subsetneq V_{j+1}$ Dann gibt es in den Ungleichungen

$$n \geq n_0 \geq n_1 \geq n_2 \geq \ldots$$

unendlich viele echte Ungleichungen, Widerspruch.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Sei W endlich-dimensional. Setze $n = \dim(W)$ und $m_i = \dim(U_i)$. Dann gilt $m_i \leqslant m_{i+1}$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn $U_i = U_{i+1}$. Angenommen, es gibt unendlich viele i mit $U_i \subsetneq U_{j+1}$. Dann gibt es in den Ungleichungen

$$m_1 \leqslant m_2 \leqslant m_3 \leqslant \ldots \leqslant n$$

unendliche echte Ungleichungen, Widerspruch.