Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Lösungsskizze zu Blatt 4

Aufgabe 1. Offenbar ist $(1,1)$ nicht der Nullvektor $0=(0,0)$, also ist die 1-elementige Familie $(1,1)\in\mathbb{R}^2$ linear unabhängig. Nach Proposition der Vorlesung sind $(1,1),(t^2,t)\in\mathbb{R}^2$ linear abhängig genau dann, wenn $(t^2,t)=(\lambda,\lambda)$ für ein $\lambda\in\mathbb{R}$, also wenn $t^2=t$ gilt. Diese quadratische Gleichung hat als Lösungen $t=0$ und $t=1$. Die Vektoren $(1,1),(t^2,t)\in\mathbb{R}^2$ sind also genau dann linear abhängig, wenn $t=0$ oder $t=1$ gilt.

Aufgabe 2. Angenommen, $\lambda\cos+\mu\sin=0$ als Abbildungen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Das bedeutet $\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)=0$ für alle reellen Zahlen x. Setzt man $x=0$ ein und benutzt $\cos(0)=1$ und $\sin(0)=0$, so ergibt sich $\lambda=0$. Da $\sin(\pi/2)=1$ folgt weiterhin $\mu=0$. Nach Kriterium für lineare Unabhängigkeit müssen $\cos,\sin\in V$ linear unabhängig sein.

Aufgabe 3. (i) Nein! Angenommen, es gäbe einen Körper K und einen K-Vektorraum V mit $V=U\cup U'$ für zwei echte Untervektorräume $U,U'\subset V$. Da $U,U'\neq V$ gibt es $x\in V\setminus U'$ und ein $x'\in V\setminus U$. Da $V=U\cup U'$ muß $x\in U$ und $x'\in U'$ gelten. Betrachte nun das Element $y=x+x'\in V=U\cup U'$. OE sei $y\in U$. Dann ist $x'=y-x\in U$, Widerspruch.

(ii) Ja! Wähle als Körper $K=\mathbb{F}_2$ und als Vektorraum $V=\mathbb{F}_2^2$. Offenbar besteht V aus vier Elementen: Dem Nullvektor und drei weiteren Vektoren $x_1,x_2,x_3\in V$. Setze $U_i=\langle x_i\rangle$. Offenbar gilt $V=U_1\cup U_2\cup U_3$.

Aufgabe 4. ,, Erzeugendensystem": Sei $x\in V$ beliebig. Da $x,\ldots,x_n\in V$ eine Basis von V als $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, gilt $x=\sum\lambda_j x_j$ für gewisse komplexe Zahlen $\lambda_j\in\mathbb{C}$. Schreibe $\lambda_j=\alpha_j+\beta_j\xi_j$ für gewisse reelle Zahlen α_j,β_j, wobei $\beta_j=\operatorname{Im}(\lambda_j)/\operatorname{Im}(\xi_j)$; hierbei benutzen wir die Voraussetzung $\operatorname{Im}(\xi_j)\neq 0$. Folglich ist

$$x=\sum\lambda_j x_j=\left(\sum\alpha_j x_j\right)+\left(\sum\beta_j\xi_j x_j\right)$$

Linearkombination mit reellen Koeffizienten aus den $x_1, \dots, x_n, \xi_1 x_1, \dots, \xi_n x_n$.

„linear unabhängig“: Angenommen, es gilt

$$0 = (\sum \alpha_j x_j) + (\sum \beta_j \xi_j x_j)$$

für gewisse reelle Zahlen α_j, β_j. Betrachte die komplexen Zahlen $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j \xi_j$. Dann gilt $0 = \sum \lambda_j x_j$. Da die $x_j \in C$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$ sind, folgt $\lambda_j = 0$, also $0 = \operatorname{Im}(\lambda_j) = \beta_j \operatorname{Im}(\xi_j)$, folglich $\beta_j = 0$. Weiterhin folgt $\alpha_j = \lambda_j + \beta_j \xi_j = 0$. Nach Kriterium sind die Vektoren $x_1, \dots, x_n, \xi_1 x_1, \dots, \xi_n x_n \in V$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$.