Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Lösungsskizze zu Blatt 3

Aufgabe 1. Sei V ein K-Vektorraum. Eine Familie von Vektoren $x_\alpha \in V$, $\alpha \in I$ heißt linear unabhängig (bzw. Erzeugendensystem, bzw. Basis) wenn es zu jedem Vektor $x \in V$ höchstens (bzw. mindestens, bzw. genau) eine Darstellung als Linearkombination $x = \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha x_\alpha$ mit $\lambda_\alpha \in K$ gibt.

Aufgabe 2. Es empfiehlt sich, die Elemente $[a]$ mit $6 \leqslant a \leqslant 10$ als $[a-11]$ zu schreiben. Wir tabulieren die Werte für λ^{-1} und λ^2:

λ	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[6]$	$[7]$	$[8]$	$[9]$	$[10]$
							$[-5]$	$[-4]$	$[-3]$	$[-2]$	$[-1]$
λ^{-1}		$[1]$	$[6]$	$[4]$	$[3]$	$[9]$	$[2]$	$[8]$	$[7]$	$[5]$	$[10]$
λ^2	$[0]$	$[1]$	$[4]$	$[9]$	$[5]$	$[3]$	$[3]$	$[5]$	$[9]$	$[4]$	$[1]$

Die Quadrate in K sind somit $[0], [1], [3], [4], [5], [9]$. Die Diskriminante von $X^2 + \mu X + \mu + 1$ ist $\Delta = \mu^2 - 4(\mu + 1) = \mu^2 - 4\mu - 4$. Wir tabulieren die Diskrimiante in Abhängigkeit vom Parameter μ:

μ	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[6]$	$[7]$	$[8]$	$[9]$	$[10]$
							$[-5]$	$[-4]$	$[-3]$	$[-2]$	$[-1]$
Δ	$[7]$	$[4]$	$[3]$	$[4]$	$[7]$	$[1]$	$[8]$	$[6]$	$[6]$	$[8]$	$[1]$

Also ist die Diskriminante Δ ein Quadrat genau dann, wenn $\mu = [1], [2], [3], [5], [10]$. Nach Proposition der Vorlesung hat das Polynom in genau diesen Fällen eine Wurzel.

Aufgabe 3. „$\Leftarrow$": OE sei $x \in \langle y \rangle$. Nach Proposition aus Vorlesung sind $x, y \in V$ linear abhängig.

„$\Rightarrow$": Seien $x, y \in V$ linear abhängig. Dann gibt es eine Linearkombination $0 = \lambda x + \mu y$ mit $\lambda \neq 0$ oder $\mu \neq 0$. OE sei $\lambda \neq 0$. Dann gilt $x = -\lambda^{-1}\mu y \in \langle y \rangle$.

Aufgabe 4. (i) Offenbar ist $0 = ([0], [0])$ das Nullemelement. Betrachte das Element $x = ([1], [1]) \neq 0$. Es gilt

$$x^2 = ([1], [1]) \cdot ([1], [1]) = ([2], [2]) = ([0], [0]) = 0.$$

Wäre R ein Körper, so müsste $x = 0$ gelten, nach Proposition in der Vorlesung. Also ist R keine Körper.

(ii) Offenbar ist $1 = ([1], [0])$ das Einselement, und es gilt $0 \neq 1$. Wie bei den komplexen Zahlen definieren wir das zu $x = (a, b)$ konjugierte Element durch

$$\overline{x} = (a, -b)$$

und es gilt $x\overline{x} = (a^2 + b^2, 0)$. In $\mathbb{F}_3$ gilt $[0]^2 + [1]^2 = [1]$ und $[1]^2 + [1]^2 = [2]$, also ist $c = a^2 + b^2 \in \mathbb{F}_3$ stets eine Einheit, sofern $(a, b) \neq (0, 0)$. In diesem Fall gilt

$$(a, b) \cdot (a/c, -b/c) = ((a^2 + b^2)/c, (-ab + ab)/c) = ([1], [0]) = 1.$$

Also ist jedes $x \in R$, $x \neq 0$ eine Einheit, und R ist ein Körper.