Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Lösungsskizze zu Blatt 2

Aufgabe 1. Ein Ring ist eine Menge R, versehen mit zwei Verknüpfungen $+, \cdot : R \times R \to R$ so, daß folgende Axiome gelten:

1. Es gilt $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in R$.
2. Es gilt $a + b = b + a$ für alle $a, b \in R$.
3. Es gibt ein Element $0 \in R$ so, daß $a + 0 = a$ für alle $a \in R$.
4. Zu jedem $a \in R$ gibt es ein Element $-a \in R$ mit $a + (-a) = 0$.
5. Es gilt $a(bc) = (ab)c$ für alle $a, b, c \in R$.
6. Es gilt $ab = ba$ für alle $a, b \in R$.
7. Es gibt ein Element $1 \in R$ so, daß $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in R$.
8. Es gilt $a(b + c) = ab + ac$ für alle $a, b, c \in R$.

Aufgabe 2. Schreibe $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{x + iy + x - iy}{2} = \frac{2x}{2} = x = \mathrm{Re}(z)$$

und

$$\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{x + iy - x + iy}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y = \mathrm{Im}(z)$$

und

$$z - 2i\,\mathrm{Im}(z) = x + iy - 2iy = x - iy = \overline{z}$$

und

$$\mathrm{Re}(iz) = \mathrm{Re}(ix + i^2 y) = \mathrm{Re}(-y + ix) = -y = -\mathrm{Im}(z).$$

Schreibe nun $w = a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Da $z+w = (x+a)+i(y+b)$ gilt, folgt

$$\overline{z} + \overline{w} = x - iy + a - ib = (x+a) - i(y+b) = \overline{z+w}.$$

Aus $zw = (xa - yb) + i(xb + ya)$ ergibt sich

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (x - iy)(a - ib) = (xa - yb) - i(xb + ya) = \overline{zw}.$$

Schreibe nun $z = re^{i\varphi}$ und $w = se^{i\psi}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ und $r, s \geq 0$. Dann gilt $r = |z|$ und $s = |w|$, und

$$|re^{i\varphi} se^{i\psi} = |rs| \cdot |e^{i\varphi}| \cdot |e^{i\psi}| = rs = |z| \cdot |w|.$$

Aufgabe 3.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{\pi i/4} \\ z_2 &= 0 = 0 \cdot e^{i\varphi}, \\ z_3 &= (1+i)(1+i)/2 = i = e^{\pi/2}, \\ z_4 &= 1 - i - 1 = -i = e^{-\pi/2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Skizze:...

Nach Definition ist $\zeta_n = e^{2\pi i n/6}$, also $\zeta_n^6 = e^{2\pi i n} = 1$, da der volle Kreisbogen die Länge 2π hat.

Sei umgekehrte $z = re^{i\varphi}$ komplexe Zahl mit $z^6 = 1$. Dann gilt

$$e^0 = 1 = r^6 e^{i6\varphi},$$

somit nach Vorlesung $r^6 = 1$, also $r = 1$, sowie $6\varphi = 2\pi n$ für eine natürliche Zahl n, also $\varphi = 2\pi n/6$. Da sich $z \in \mathbb{C}$ nicht ändert, wenn n durch $n \pm 6$ ersetzt wird, können wir durch Division mit Rest erreichen, daß $0 \leqslant n < 6$ gilt.

Sei $\zeta = e^{2\pi/6}$. Dann gilt $\zeta_n = \zeta^n$. Wie oben sieht man, daß $\zeta^\nu = 1$ gilt genau dann, wenn $6 \mid \nu$. Folglich ist

$$\nu_0 = 1, \quad \nu_1 = 6, \quad \nu_2 = 3, \quad \nu_3 = 2, \quad \nu_4 = 3, \quad \nu_5 = 6,$$

was man auch der Skizze entnehmen kann.