Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Lösungsskizze zu Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $X^2 + bX + c$ ein quadratisches Polynom. Gemäß Vorlesung ist die Diskriminante als $\Delta = b^2 - 4c$ definiert.

Aufgabe 2. Setze $\Delta = b^2 - 4c$ und $w = \sqrt{\Delta}$. Nach den binomischen Formeln gilt

$$\begin{aligned} 4(\lambda - \lambda')^2 &= ((w-b) - (-w-b))^2 \\ &= (w-b)^2 - 2(w-b)(-w-b) + (-w-b)^2 \\ &= \Delta - 2wb + b^2 - 2(b^2 - \Delta) + \Delta + 2wb + b^2 \\ &= 4\Delta, \end{aligned} \tag{1}$$

also $(\lambda - \lambda')^2 = \Delta$.

Aufgabe 3. Wir beweisen zunächst $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

„$\subset$": Sei $x \in f^{-1}(A \cap B)$, also $f(x) \in A \cap B$ nach Definition des Urbilds. Daraus folgt $f(x) \in A$ und $f(x) \in B$ nach Definition der Schnittmenge. Dann gilt $x \in f^{-1}(A)$ und $x \in f^{-1}(B)$, und somit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

„$\supset$": Sei $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Dann gilt $x \in f^{-1}(A)$ und $x \in f^{-1}(B)$, somit $f(x) \in A$ und $f(x) \in B$, deshalb $f(x) \in A \cap B$, und schließlich $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Der Beweis von $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ verläuft ganz analog:

„$\subset$": Sei $x \in f^{-1}(A \cup B)$, also $f(x) \in A \cup B$ nach Definition des Urbilds. Daraus folgt $f(x) \in A$ oder $f(x) \in B$ nach Definition der Vereinigungsmenge. Dann gilt $x \in f^{-1}(A)$ oder $x \in f^{-1}(B)$, und somit $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

„$\supset$": Sei $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Dann gilt $x \in f^{-1}(A)$ oder $x \in f^{-1}(B)$, somit $f(x) \in A$ oder $f(x) \in B$, deshalb $f(x) \in A \cup B$, und schließlich $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

Aufgabe 4. Setzt man $c = e$ und benutzt man $a \star e = a$ und $e \star d = d$, so ergibt sich

$$a \star (b \star d) = (a \star b) \star d$$

für alle $a, b, d \in M$. Also gilt das Assoziativgesetz. Setzt man dagegen $a = d = e$, so ergibt sich wie oben

$$c \star b = b \star c$$

für alle $b, c \in M$. Somit gilt das Kommutativgesetz, und M ist ein kommutative Monoid.