Aufgabe 1. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, und $x_1, \ldots, x_n \in V$ eine Basis. Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$x_1, ix_1, x_2, ix_2, \ldots, x_n, ix_n \in V$$

eine Basis für V aufgefaßt als $\mathbb{R}$-Vektorraum bilden.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, und V ein K-Vektorraum, und $x_1, x_2, x_3 \in V$ eine Basis. Wir betrachten den Endomorphismus $f : V \to V$ mit

$$f(x_1) = x_2, \quad f(x_2) = x_3, \quad f(x_3) = -6x_2 - 3x_3.$$

(i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_f(T) \in K[T]$.

(ii) Entscheiden Sie für die Körper $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_{17}$, ob der Endomorphismus f trigonalisierbar ist.

(iii) Entscheiden Sie für $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_{17}$, ob f diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3. Wir betrachten für $n \geq 1$ die Matrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}).$$

(i) Berechnen Sie $\det(A_1), \det(A_2), \det(A_3)$ explizit und erraten Sie eine Formel für $\det(A_n)$.

(ii) Drücken Sie $\det(A_n)$ mittels Laplace-Entwicklung durch $\det(A_{n-1})$ und $\det(A_{n-2})$ aus.

(iii) Beweisen Sie Ihre erratene Formel für $\det(A_n)$ durch vollständige Induktion.

Aufgabe 4. Sei $p > 0$ eine Primzahl und

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{F}_p).$$

(i) Für welche Primzahlen $p > 0$ ist die Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F}_p)$ invertierbar?

(ii) Berechnen Sie für $p = 5$ die inverse Matrix A^{-1} mit dem Gauss-Algorithmus.