

# Übungen zur Linearen Algebra I

## Blatt 13

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie, daß komplexe Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, \mathbb{C})$$

mit  $a, d \in \mathbb{R}$  und  $c = -\bar{b}$  diagonalisierbar sind.

**Aufgabe 2.** Sei  $H \subset \text{Mat}(n, \mathbb{C})$  die Teilmenge der hermiteschen Matrizen.

(i) Verifizieren Sie, daß  $H \subset \text{Mat}(n, \mathbb{C})$  eine Untervektorraum bezüglich der  $\mathbb{R}$ -Vektorraumstruktur auf  $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$  ist.

(ii) Geben Sie eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $H$  an und bestimmen Sie  $\dim_{\mathbb{R}}(H)$ .

**Aufgabe 3.** Sei  $\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$  das komplexe Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{C}^n$ , und  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$  eine hermitesche Matrix. Beweisen Sie, daß  $\Phi(Ax, x) \in \mathbb{R}$  gilt für alle  $x \in \mathbb{C}^n$ .

**Aufgabe 4.** Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum, und  $x_1, \dots, x_n \in V$  eine Basis. Sei  $f : V \rightarrow V$  der Endomorphismus mit  $f(x_i) = x_{i+1}$ , wobei der Index modulo  $n$  zu verstehen ist.

(i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom  $\chi_f(T) \in K[T]$ .

(ii) Sei  $K = \mathbb{C}$ . Bestimmen Sie alle Eigenwerte  $\epsilon \in \mathbb{C}$  und zeigen Sie, daß  $f : V \rightarrow V$  diagonalisierbar ist.

(iii) Sei  $K = \mathbb{R}$  und  $n \geq 3$ . Verifizieren Sie, daß  $f$  nicht trigonalisierbar ist.

(iv) Sei  $K = \mathbb{F}_3$  und  $n = 3$ . Beweisen Sie, daß  $f : V \rightarrow V$  trigonalisierbar aber nicht diagonalisierbar ist.

**Abgabe:** Bis Montag der 2.2. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

**Klausur:** Bitte melden Sie sich zur Klausur im HIS-LSF unter der Lehrveranstaltung *Klausur Lineare Algebra I* bis zum 1.2. an. Die zugelassenen Teilnehmer werden durch Aushang bekannt gegeben.

**Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Din-A-4 Blatt (also zwei Seiten) handschriftliche Notizen.

**Termine:**

Klausur: Montag, 9.2. um 9:00-11:00 Uhr in den Hörsälen 5C und 5D

Klausureinsicht: Freitag, 13.2. um 14:00-15:00 Uhr im Seminarraum 25.13.U1.22