Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei V ein reeller Vektorraum, und $S \subset \mathrm{Mult}_2(V, \mathbb{R})$ die Teilmenge aller Skalarprodukte $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß diese Teilmenge ein *konvexer Kegel* ist. Mit anderen Worten:

(i) Sind Φ_0, Φ_1 zwei Skalarprodukte auf V und ist $t \in [0, 1]$ eine reelle Zahl, so ist auch die bilineare Abbildung $\Phi_t = (1 - t)\Phi_0 + t\Phi_1$ ein Skalarprodukt auf V.

(ii) Ist Φ ein Skalarprodukt auf V und ist $t > 0$ eine reelle Zahl, so ist auch die bilineare Abbildung $t\Phi$ ein Skalarprodukt auf V.

Aufgabe 2. Sei $V \subset \mathrm{Mat}(2, K)$ der Untervektorraum aller Matrizen A mit Spur $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad A \longmapsto A^t.$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_f(T) \in K[T]$ und finden Sie heraus, ob f trigonalisierbar oder diagonalisierbar ist. Berücksichtigen Sie dabei auch den Fall $\mathrm{char}(K) = 2$.

Aufgabe 3. Sei E ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum, und $U, V \subset E$ zwei Untervektorräume. Zeigen Sie:

(i) $U \subset V \Rightarrow U^\perp \supset V^\perp$.

(ii) $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.

(iii) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

Aufgabe 4. Sind alle symmetrischen Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ diagonalisierbar?

Abgabe: Bis Montag der 26.1. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.