Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 1. Drücken Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(T)$ der 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

durch die Matrixeinträge $a, b, \ldots, k \in K$ aus.

Aufgabe 2. Finden Sie für die Körper $K = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_7, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ heraus, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, K)$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3. Sei $P(T) = T^m + \beta_{m-1}T^{m-1} + \ldots + \beta_0 \in K[T]$ ein Polynom, und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft, daß der Endomorphismus

$$P(f) = f^m + \beta_{m-1}f^{m-1} + \ldots + \beta_1 f + \beta_0 \,\mathrm{id}_V$$

die Nullabbildung $V \to V$, $x \mapsto 0$ ist. Beweisen Sie, daß dann jeder Eigenwert von f eine Wurzel von $P(T)$ ist.

Aufgabe 4. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Summe von zwei diagonalisierbaren 2×2-Matrizen ist diagonalisierbar.

(ii) Das Matrizenprodukt von zwei diagonalisierbaren 2×2-Matrizen ist diagonalisierbar.

Abgabe: Bis Montag der 19.1. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.