Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Q}).$$

(i) Zeigen Sie, daß A invertierbar ist.

(ii) Berechnen Sie die inverse Matrix mit der Cramerschen Regel.

(iii) Berechnen Sie die inverse Matrix mit dem Gauß-Algorithmus.

Aufgabe 2. Sei $A = (\lambda_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q})$ eine invertierbare Matrix, deren Einträge λ_{ij} ganze Zahlen sind. Sei $B = (\mu_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$ die zu A inverse Matrix. Beweisen Sie, daß die Einträge μ_{ij} genau dann ganze Zahlen sind, wenn $\det(A) = \pm 1$ gilt.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ eine Matrix, und

$$C = ((-1)^{i+j} \det(A^{ij})) \in \mathrm{Mat}(n, K)$$

ihre Kofaktormatrix. Zeigen Sie, daß $\det(C) = \det(A)^{n-1}$ gilt.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, und $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, t \in K$ Skalare. Wir definieren eine $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} t & & & & & \alpha_0 \\ -1 & t & & & & \alpha_1 \\ & -1 & t & & & \alpha_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & t & \alpha_{n-2} \\ & & & & -1 & t + \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie durch Laplace-Entwicklung und Induktion nach n, daß

$$\det(A) = t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0.$$

Abgabe: Bis Montag der 12.1. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.