Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 9

Aufgabe 1. Rechnen Sie explizit nach, daß die Abbildung

$$\det : \mathrm{GL}(2, K) \longrightarrow K^{\times}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad - bc$$

ein Homomorphismus von Gruppen ist.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $V = \mathrm{Mat}(2, K)$ der K-Vektorraum aller 2×2-Matrizen. Wir fixieren eine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und betrachten den durch die sogenannte *Lie-Klammer* $[A, B] = AB - BA$ gegebenen Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad B \longmapsto [A, B].$$

Wählen Sie eine Basis von V und bestimmen Sie die Matrix $M \in \mathrm{Mat}(4, K)$ von f bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 3. Sei $n \geq 0$. Berechnen Sie das Signum der Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix} \in S_n.$$

Tip: Multiplizieren Sie mit einer geeigneten Transposition und verwenden Sie vollständige Induktion.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Wir erhalten zwei Teilmengen

$$U' = \bigcup_{i=0}^{\infty} \ker(f^i) \quad \text{und} \quad U'' = \bigcap_{i=0}^{\infty} \operatorname{im}(f^i).$$

(i) Verifizieren Sie, daß diese Teilmengen Untervektorräume sind.

(ii) Beweisen Sie, daß $U' \cap U'' = 0$ und $U' + U'' = V$ gilt.

Aufgabe 1*. Berechnen Sie die Determinante zu den komplexen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & i \\ t & t+i \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} t & 0 & 2i-2 \\ -1 & t & i-2 \\ 0 & -1 & t+i+1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie, für welche Paramter $t \in \mathbb{C}$ diese Matrizen nicht invertierbar sind.

Aufgabe 2*. Sind die komplexen Matrizen

$$\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$

zueinander konjugiert?

Aufgabe 3*. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und $n \geq 0$. Beweisen Sie, daß der Vektorraum $\mathrm{Mult}_n(V, K)$ aller multilineare Abbildungen

$$\Delta : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{n \text{ Faktoren}} \longrightarrow K$$

endlich-dimensional ist.

Aufgabe 4*. Sei A eine invertierbare 2×2-Matrix über einem Körper K. Beweisen Sie, dass von den folgenden beiden Aussagen genau eine zutrifft:

1. Es gibt obere Dreiecksmatrizen $X, Y \in \mathrm{GL}(2, K)$ mit $A = XY$.
2. Es gibt obere Dreiecksmatrizen $U, V \in \mathrm{GL}(2, K)$ mit $A = U \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V$.

Abgabe: Bis Montag der 5.1. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!