Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 1. Bestimmen Sie, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Q})$$

invertierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

Aufgabe 2. Sei $V \subset K[X]$ der Untervektorraum aller Polynome vom Grad $\leqslant 4$. Wir betrachten die Abbildung

$$f : V \longrightarrow K^2, \quad P(X) \longmapsto (P(1), P'(0)).$$

Verifizieren Sie, daß f linear ist, beschreiben Sie diese Abbildung durch eine Matrix, bestimmen Sie ihren Rang, und berechnen Sie eine Basis ihres Kerns.

Aufgabe 3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Q})$$

eine 2×2-Matrix mit *ganzzahligen* Einträgen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Für jede Primzahl $p > 0$ sei

$$A_p = \begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{F}_p)$$

die Matrix, die entsteht, wenn man die Einträge von A modulo p nimmt. Wir nehmen nun an, daß $A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Q})$ invertierbar ist. Beweisen Sie, daß dann die $A_p \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{F}_p)$ für fast alle Primzahlen $p > 0$ invertierbar sind.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, und $n \geq 0$. Man sagt, daß zwei $n \times n$-Matrizen A, B miteinander *kommutieren*, wenn $AB = BA$ gilt.

(i) Geben Sie 2×2-Matrizen A, B an, die miteinander kommutieren.

(ii) Geben Sie 2×2-Matrizen A, B an, die nicht miteinander kommutieren.

(iii) Sei nun $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$. Beweisen Sie, daß A mit *allen* Matrizen $B \in \mathrm{Mat}(n, K)$ kommutiert genau dann, wenn $A = \lambda E$ für ein Skalar $\lambda \in K$.

Abgabe: Bis Montag der 15.12. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.