Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

# Übungen zur Linearen Algebra I

## Blatt 7

**Aufgabe 1.** Bestimmen Sie den Rang und sowie eine Basis für den Kern der $3 \times 4$-Matrix
$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 24 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{Q}).$$

**Aufgabe 2.** Seien $V, W$ zwei $K$-Vektorräume, $f : V \to W$ eine Abbildung, und $\Gamma_f \subset V \times W$ sein Graph. Beweisen Sie, daß die Abbildung $f : V \to W$ linear ist genau dann, wenn die Teilmenge $\Gamma_f \subset V \times W$ ein Untervektorraum ist.

**Aufgabe 3.** Unter einer *Fibonacci-Folge* verstehen wir eine Folge von reellen Zahlen $a_n$, $n \geq 0$ mit der Eigenschaft $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für alle $n \geq 2$. Sei
$$F \subset \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}$$
die Teilmenge aller Fibonacci-Folgen. Zeigen Sie, daß diese Teilmenge ein Untervektorraum, und bestimmen Sie dessen Dimension.

**Aufgabe 4.** Sei $K$ ein Körper, und $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ eine $n \times n$-Matrix. Beweisen Sie, daß es ein $m \leqslant n^2$ und Skalare $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1} \in K$ gibt so, daß
$$A^m + \lambda_{m-1}A^{m-1} + \ldots + \lambda_1 A + \lambda_0 E$$
die Nullmatrix ist. Hierbei ist $A^m$ das $m$-fache Matrizenprodukt und $E$ die Einheitsmatrix.

**Abgabe:** Bis Montag der 8.12. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.