Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 6

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden fünf Matrizenprodukte:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -x \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -x \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ x \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ x \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Sei V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subset V$ zwei Untervektorräume. Ihre Dimensionen seien $n = \dim(V)$ und $n_i = \dim(U_i)$.

(i) Angenommen, $n_1, n_2 > n/2$. Beweisen Sie, daß $U_1 \cap U_2 \subset V$ nicht der Nullvektorraum ist.

(ii) Sei nun $n_1, n_2 < n/2$. Zeigen Sie, daß $U_1 + U_2 \subset V$ nicht der gesamte Vektorraum V ist.

Aufgabe 3. Die *formale Ableitung* eines Polynoms $P(X) = \sum_{n\geq 0} \lambda_n X^n$ ist definiert als $P'(X) = \sum_{n\geq 1} n\lambda_n X^{n-1}$. Sei nun $V_n \subset K[X]$ der Untervektorraum aller Polynome vom Grad $\leqslant n$ über einem Körper K. Wir betrachten die Abbildung

$$f : V_3 \longrightarrow V_4, \quad P(X) \longmapsto -P'(X^2 - 1).$$

(i) Verifizieren Sie, daß die Abbildung f linear ist.

(ii) Wählen Sie Basen von V_3 und V_4, und bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich dieser Basen.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, und $A = (\lambda_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen $\lambda_{ij} \in K$. Angenommen, es gilt $\lambda_{ij} = 0$ wenn $j \geq i$. Beweisen Sie, daß das n-fache Matrixprodukt

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ Faktoren}}$$

die Nullmatrix ist.

Abgabe: Bis Montag der 1.12. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.