Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 5

Aufgabe 1. Wie lautet die Definition von linearen Abbildungen?

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, und $V \subset K[X]$ der Untervektorraum aller Polynome f vom Grad $\deg(f) \leqslant 3$.

(i) Bestimmen Sie die Dimension von V.

(ii) Zeigen Sie, daß die vier Polynome

$$f_1 = X^3 - 3X^2 + 2, \quad f_2 = (X-1)^3, \quad f_3 = X, \quad f_4 = X + 1$$

linear abhängig sind.

(iii) Finden Sie ein $1 \leqslant i \leqslant 4$ so, daß das nach Weglassen von f_i die drei übrigen Polynome $f_1, \ldots, \widehat{f_i}, \ldots, f_4 \in V$ linear unabhängig geworden sind.

(iii) Ergänzen Sie die drei Polynome $f_1, \ldots, \widehat{f_i}, \ldots, f_4 \in V$ zu einer Basis.

Aufgabe 3. Finden Sie eine Primzahl $p > 0$, für welche die beiden Vektoren

$$([7], [30]), ([121], [14]) \in \mathbb{F}_p^2$$

ein Erzeugendensystem bilden; finden Sie eine weitere Primzahl $p > 0$, für welche dies nicht gilt.

Aufgabe 4. Sei W ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) W ist endlich-dimensional.

(ii) Für jede absteigende Folge von Untervektorräumen in W

$$V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$$

gibt es ein $j \geq 0$ mit $V_j = V_{j+1} = V_{j+2} = \dots$.

(iii) Für jede aufsteigende Folge von Untervektorräumen in W

$$U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$$

gibt es ein $i \geq 0$ mit $U_i = U_{i+1} = U_{i+2} = \dots$.

Abgabe: Bis Montag der 24.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Raumänderung: Ab Mittwoch, den 19.11. findet die Vorlesung mittwochs im Hörsaal 5F statt! Montags bleiben wir wie gehabt im Hörsaal 5D.