Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 4

Aufgabe 1. Für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ sind die beiden Vektoren

$$(1,1),(t,t^2) \in \mathbb{R}^2$$

linear abhängig?

Aufgabe 2. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$\sin, \cos \in V$$

linear unabhängig sind.

Tip: Betrachten Sie die Nullstellen von cos und sin.

Aufgabe 3. Wir bezeichnen einen Untervektorraum $U \subset V$ als *echten* Untervektorraum falls $U \neq V$.

(i) Kann ein Vektorraum die Vereinigungsmenge von zwei echten Untervektorräumen sein?

(ii) Gibt es einen Vektorraum, der die Vereinigungsmenge von drei echten Untervektorräumen ist?

Aufgabe 4. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Indem wir die Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \to V$ auf $\mathbb{R} \times V$ einschränkt, wird die kommutative Gruppe V zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei nun $x_1, \ldots, x_n \in V$ eine Basis von V als $\mathbb{C}$-Vektorraum, und $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit Imaginärteil $\mathrm{Im}(\xi_i) \neq 0$. Beweisen Sie, daß die Vektoren

$$x_1, \ldots, x_n, \xi_1 x_1, \ldots, \xi_n x_n \in V$$

eine Basis von V als $\mathbb{R}$-Vektorraum bilden.

Tip: Betrachten Sie zunächst den Spezialfall $V = \mathbb{C}$.

Abgabe: Bis Montag der 17.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.