

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 3

Aufgabe 1. Wie lauten die Definitionen von Erzeugendensystem, linear unabhängig, sowie Basis?

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe betrachten wir den Körper $K = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

- (i) Geben Sie zu jedem $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ das Inverse λ^{-1} an.
- (ii) Zählen Sie die Elemente aus K auf, die Quadrate sind.
- (iii) Welche der 11 quadratischen Polynome der Form

$$X^2 + \mu X + \mu + 1, \quad \mu \in K$$

besitzen eine Wurzel in K ?

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum, und $x, y \in V$ zwei Vektoren. Beweisen Sie, daß $x, y \in V$ linear abhängig sind genau dann, wenn entweder $x \in \langle y \rangle$ oder $y \in \langle x \rangle$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen. In Analogie zu den komplexen Zahlen machen wir die vierelementige Menge $R = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ zu einem Ring mit Addition

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

und Multiplikation

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$

- (i) Ist der Ring R ein Körper?
 - (ii) Erhält man einen Körper, wenn man \mathbb{F}_2 durch \mathbb{F}_3 ersetzt?
- (In dieser Aufgabe dürfen Sie getrost verwenden, daß die Verknüpfungen tatsächlich einen Ring liefern.)

Abgabe: Bis Montag der 10.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.