Universität Düsseldorf WS 07/08
Mathematisches Institut

Seminar über Chern-Klassen

Organisation: Prof. Dr. Stefan Schröer, Philipp Gross, Felix Schüller
Ort und Zeit: Montags, 14-16 Uhr ct, 25.13.U1.33.
Erster Vortrag: 19.11.

Überblick

Ziel des Seminars ist es, Grothendiecks axiomatische Definition der *Chern-Klassen* für lokal freie Garben auf Schemata zu verstehen. Chern-Klassen entstanden in den 40er Jahren in Differentialgeometrie und Topologie und spielen nunmehr eine wichtige Rolle in der Algebraischen Geometrie.

Chern-Klassen sind algebraische Invarianten von lokal freien Garben: Sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ *isomorph*, so sind ihre Chern-Klassen $c_i(\mathcal{E})$ und $c_i(\mathcal{F})$ *gleich* (die Umkehrung gilt allerdings nicht). Diese Theorie eröffnet somit einen Weg, auf algebraischem Wege zu zeigen, daß zwei lokal freie Garben nicht isomorph sind. Sie spielen weiterhin eine zentrale Rolle im *Satz von Grothendieck–Riemann–Roch*, der eine Formel für die Euler-Charakteristik $\chi(\mathcal{E})$ in Chern-Klassen ist. Im gewissen Sinne bilden Chern-Klassen eine umfassende Verallgemeinerung des Grads der invertierbaren Garben auf Kurven.

Es existieren etliche, gänzlich verschiedene Ansätze zur Definition und Berechnung von Chern-Klassen. In jedem Fall nehmen sie Werte $c_i(\mathcal{E}) \in A^i(X)$ in gewissen abelschen Gruppen $A^i(X)$ an, die funktoriell von X abhängen. Grothendieck [Gr1] gab eine sehr einfache und direkte Definition der Chern-Klassen, die nur auf der Axiomatik des Funktors $X \mapsto A^i(X)$ beruht. Als Beispiel für so einen Funktor werden wir die *Chow-Gruppen* $\mathrm{CH}^i(X)$ durchnehmen.

Programm

Vortrag 1: Chow-Gruppen 19.11.
Diskutieren Sie die Zykelgruppen $Z_i(X)$, den Pushforward für eigentliche Morphismen sowie die Chow-Gruppen $\mathrm{CH}_i(X)$. Arbeiten Sie dabei zur Einfachheit mit algebraischen Schemata, also solchen vom endlichen Typ über Neziri

einem Grundkörper. Überspringen Sie die Graduierung durch Kodimension. Verwenden Sie das Symbol $\mathrm{CH}_i(X)$ statt $A_i(X)$ für die Chow-Gruppen. Die Bemerkungen mit den höheren Bildgarben $R^j f_*(\mathcal{F})$ können übergangen werden. Referenz: [Fu], Abschnitte 1.1-1.8, ohne 1.6 und 1.7. (ca. 4 Seiten)

Vortrag 2: Gysin-Abbildungen — 26.11. Lubas

Geben Sie die Filtration $Z^i(X)$ durch Kodimension an, beschreiben Sie den Pullback (= Gysin-Abbildungen) für flache Morphismen bzw. Cartier-Divisoren und diskutieren Sie die exakte Sequenz zu einer offenen Einbettung (= Mayer–Vietoris-Sequenz). Referenz: [Fu], Abschnitte 1.6, 1.7, 1.9. (3 Seiten)

Vortrag 3: Grassmannsche Räume — 03.12. Novakovich

Beschreiben Sie die Konstruktion der Grassmannschen Räume als Schema, das einen gewissen Funktor representiert. Referenz: [Se], Abschnitt 4.3.3.

Vortrag 4: Axiome für $A^\bullet(X)$ — 10.12. Bettermann

Diskutieren Sie die Axiome für den Funktor $X \mapsto A^\bullet(X)$, in dem die Chern-Klassen liegen. Ersetzen Sie dabei die Graduierung: $A^i(X)$ statt $A^{2i}(X)$. Passen Sie auch die Notation an: espaces algebriques non singulieres = reguläres algebraisches Schema; fibre vectoriel = lokal freie Garbe vom endlichen Rang; $P(X)$ = Picard-Gruppe $\mathrm{Pic}(X)$, $\mathrm{cl}_X(L)$ = Isomorphieklasse $[\mathcal{L}]$ einer invertierbaren Garbe, $P(E)$ = relatives homogene Spektrum $\mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}^\vee)$. Referenz: [Gr1], Abschnitt 2 (4 Seiten).

Vortrag 5: Definition und Eigenschaften der Chern-Klassen — 17.12. Schüller

Diskutieren Sie die Axiome der Chern-Klassen $c_i(\mathcal{E}) \in A^i(X)$, und geben Sie den Beweis der Eindeutigkeit und Existenz durch. Referenz: [Gr1], Abschnitt 3 (4 Seiten).

Vortrag 6: Die Nullklasse zu einem regulären Schnitt — 07.01. Partsch

Zeigen Sie, wie man die Chern-Klasse $c_r(\mathcal{E})$ für eine lokal freie Garbe $\mathcal{E}$ vom Rang r ausrechnen kann, falls man einen regulären Schnitt hat. Referenz: [Gr1], Abschnitt 5 (3 Seiten).

Vortrag 7: Multiplikationsgesetz im Chow-Gruppen — 14.01. Gross

Diskutieren Sie die Multiplikation für Zyklen, die sich eigentlich schneiden, und Chows Moving-Lemma. Referenz: [Fu], Abschnitt 2 und [DV], Abschnitt I.02 (ca. 5 Seiten).

Vortrag 8: Chow-Ring eines projektiven Bündels 21.01. Höppner

Berechnen Sie den Chow-Ring $\mathrm{CH}^\bullet(P)$ eines projektiven Bündels $P \to X$ über einer regulären Basis als Modul über $\mathrm{CH}^\bullet(X)$. Referenz: [DV], Abschnitt II, Seite 47-50 (4 Seiten).

Vortrag 9: Der Satz von Riemann–Roch 28.01. N.N.

Literatur

[DV] A. Douady, J.-L. Verdier: Séminaire de géométrie analytique. Asterique 36-37 (1976).

[Fu] W. Fulton: Rational equivalence on singular varieties. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 45 (1975), 147–167.

[Gr1] A. Grothendieck: La théorie des classes de Chern. Bull. Soc. Math. France 86 (1958), 137–154.

[Gr2] A. Grothendieck: Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections In: Séminaire C. Chevalley, Anneaux de Chow et applications. Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris 1958.

[Se] E. Sernesi: Deformations of algebraic schemes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 334. Springer, Berlin, 2006.

Die Artikel [Gr1], [Fu] sind im Internet unter Numdam erhältlich.