Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 07

# Übungen zu Algebraische Geometrie II

## Blatt 7

**Aufgabe 1.*** Sei $C$ eine integre eigentliche Kurve. Gegeben seien zwei invertierbare Garben $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ mit $\deg(\mathcal{L}_1) < \deg(\mathcal{L}_2)$. Zeigen Sie, daß dann

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1) = 0$$

gilt. Gilt diese Aussage auch für Kurven, die nicht integer sind?

**Aufgabe 2.*** Sei $C$ eine integre eigentliche Kurve mit $h^0(\mathcal{O}_C) = 1$ und arithmetischem Geschlecht $p_a = h^1(\mathcal{O}_C)$. Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}_2 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von kohärenten Garben auf $C$ mit $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ invertierbar. Angenommen, die dualisierende Garbe $\omega_C$ ist invertierbar, und es gelte

$$\deg(\mathcal{L}_2) + 2p_a < \deg(\mathcal{L}_2) + 2.$$

Zeigen Sie, daß die kurze exakte Sequenz spalten muß.

**Aufgabe 3.** Sei $C$ eine integre eigentliche Kurve mit $h^0(\mathcal{O}_C) = 1$ und dualisierender Garbe $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C$. Zeigen Sie, daß

$$h^0(\mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L})$$

für alle $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(C)$ mit $\deg(\mathcal{L}) > 0$ gilt.

**Aufgabe 4.** Sei $X$ ein eigentliches Schema über einem noetherschen Grundring $R$, und $X_{\mathrm{red}} \subset X$ das zugehörige reduzierte abgeschlossene Unterschema. Sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf $X$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}$ genau dann ampel auf $X$ ist, wenn seine Einschränkung $\mathcal{L}|_{X_{\mathrm{red}}}$ ampel auf $X_{\mathrm{red}}$ ist.

**Abgabe:** Bis Montag, den 4.6. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.