Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 06
13.7.06

Klausur Einführung in die Algebra

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Unterschrift:

Studienfach:

Studienziel:

Semesterzahl:

Legen Sie Ihren Studenten- und Personalausweis sichtbar am Arbeitsplatz aus.
Schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen. Begründen Sie Ihre Antworten.
Erlaubte Hilfsmittel: 2 Blatt handschriftliche Notizen.
Bei jeder Aufgabe können Sie 5 Punkte erreichen.

1	2	3	4	5	$\sum$

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphieklassen von endlichen abelschen Gruppen G der Ordnung $\operatorname{ord}(G) = 1800$, und stellen sie jede solche Gruppe als Produkt von zyklischen Gruppen dar.

Aufgabe 2. (i) Sei G eine Gruppe von Ordung $\operatorname{ord}(G) = 294$. Wieviel Sylow-7-Untergruppen gibt es?

(ii) Sei G eine endliche Gruppe. Wir wählen zu jedem Primteiler p_i der Gruppenordnung $n = \operatorname{ord}(G)$ eine Sylow-p_i-Untergruppe $P_i \subset G$. Zeigen Sie, daß die Gruppe G von der Teilmenge $P_1 \cup \ldots \cup P_r$ erzeugt wird.

Aufgabe 3. Wir betrachten die reellen Zahlen $\mu = \sqrt{3}$ und $\lambda = \sqrt{\mu}$ und definieren die Körper $E = \mathbb{Q}(\mu)$ und $L = E(\lambda)$ als Unterkörper von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die beiden Körpererweiterungen $\mathbb{Q} \subset E$ und $E \subset L$ galoisch sind, aber daß die Verkettung $\mathbb{Q} \subset L$ nicht galoisch ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, und $K \subset L$ eine endliche Galois-Erweiterung, mit Galois-Gruppe $G = \operatorname{Gal}(L/K)$. Seien $H, H' \subset G$ zwei Untergruppen, und $E = L^H$, $E' = L^{H'}$ die ensprechenden Fixkörper. Angenommen, es gilt $H \cap H' = \{1\}$. Zeigen Sie, daß dann $L = K(E \cup E')$ gilt.

Aufgabe 5. Sei $f = a_n X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{Q}[X]$ eine Polynom mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Z}$. Angenommen, f is separabel. Zeigen Sie, daß daß für alle bis auf endlich viele Primzahlen $p > 0$ die Reduktion $\bar{f} = \bar{a}_n X^n + \ldots + \bar{a}_0 \in \mathbb{F}_p[X]$ ebenfalls separabel ist.