

## Übungen zur Linearen Algebra II

### Blatt 1

**Aufgabe 1.** Wir betrachten den Körper  $K = \mathbb{F}_2[t]/(t^2 + t + 1)$  mit den vier Elementen  $0, 1, t, 1 + t$ . Verifizieren Sie, daß die Abbildung

$$\iota : K \longrightarrow K, \quad a + bt \longmapsto (a + b) + bt$$

eine Körperinvolution ist.

**Aufgabe 2.** Sei  $K$  ein Körper und  $A \in \text{Mat}_2(K)$ . Zeigen Sie, daß  $\det(A) = 1$  genau dann gilt, wenn  $A^t B A = B$ , wobei  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 3.** Sei  $V$  der 4-dimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Matrizen  $A \in \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  der Form

$$A = \begin{pmatrix} r & z \\ \bar{z} & s \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r, s \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\Phi(A, B) = \det(A + B) - \det(A) - \det(B)$$

eine Bilinearform  $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ist. Wählen Sie eine Basis  $A_1, \dots, A_4 \in V$ , und berechnen Sie die Gram-Matrix  $G = (\Phi(A_i, A_j))$ .

**Aufgabe 4.** Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper,  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Beweisen Sie, dass  $f$  genau dann diagonalisierbar ist, wenn es zu jedem  $f$ -invarianten Unterraum  $U \subset V$  einen  $f$ -invarianten Unterraum  $U' \subset V$  mit  $V = U \oplus U'$  gibt.

**Abgabe:** Bis Montag, den 18.4. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

## Übungen zur Linearen Algebra II

### Blatt 2

**Aufgabe 1.** Eine Matrix  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  heißt *normal* falls  $AA^t = A^tA$ . Zeigen Sie, dass eine reelle  $2 \times 2$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

genau dann normal ist, wenn  $b = c$ , oder  $b = -c$  und  $a = d$ .

**Aufgabe 2.** Wir betrachten die reellen  $2 \times 2$ -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

(i) Finden Sie ein  $S \in GL_2(\mathbb{C})$  mit  $B = S^tAS$

(ii) Zeigen Sie, dass es kein  $T \in GL_2(\mathbb{R})$  mit  $B = T^tAT$  gibt.

**Aufgabe 3.** Sei  $U$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $U^\vee = \text{Hom}_K(U, K)$  sein Dualraum. Für  $V = U \oplus U^\vee$  definieren wir die Abbildung

$$\Phi : V \times V \longrightarrow K, \quad \Phi((a, f), (a', f')) = f(a') - f'(a).$$

Verifizieren Sie, dass  $\Phi$  eine Bilinearform ist, die alternierend und nichtentartet ist.

**Aufgabe 4.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper  $K$ , und  $f : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Wir erhalten zwei Untervektorräume

$$V^0 = \bigcup_{i=0}^{\infty} \ker(f^i) \quad \text{und} \quad V^+ = \bigcap_{i=0}^{\infty} f^i(V).$$

Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung  $V^0 \oplus V^+ \rightarrow V$  bijektiv ist.

**Abgabe:** Bis Montag, den 25.4. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

## Übungen zur Linearen Algebra II

### Blatt 3

**Aufgabe 1.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum mit einer symmetrischen nichtentarteten Bilinearform  $\Phi : V \times V \rightarrow K$ . Ein Untervektorraum  $U \subset V$  heißt *total isotrop*, wenn  $\Phi(x, y) = 0$  für alle  $x, y \in U$ . Zeigen Sie, dass  $\dim(U) \leq n/2$  für jeden total isotropen Unterraum  $U \subset V$  gilt.

**Aufgabe 2.** Sei  $U$  ein  $K$ -Vektorraum mit nichtentarteter Hermitescher Form  $\Phi$ . Wir definieren auf  $V = U \oplus U$  eine nichtentartete Hermitesche Form

$$\Psi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \Phi(x_1, y_1) + \Phi(x_2, y_2).$$

Sei  $f : V \rightarrow V$  der Endomorphismus mit  $f(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$ . Zeigen Sie, dass der adjungierte Endomorphismus  $f^* : V \rightarrow V$  durch  $f(y_1, y_2) = (-y_2, y_1)$  gegeben wird.

**Aufgabe 3.** Sei  $\mathbb{C}$  mit der Involution  $\sigma(z) = \bar{z}$  versehen, und  $S$  der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller Sesquilinearformen  $\Phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$

- (i) Ist die Teilmenge  $H \subset S$  aller Hermiteschen Formen ein komplexer Untervektorraum?
- (ii) Zeigen Sie, dass  $H \subset S$  ein reeller Untervektorraum ist, und berechnen Sie  $\dim_{\mathbb{R}}(H)$ .

**Aufgabe 4.** Eine Matrix  $S \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  mit  $S^t = S$  heißt bekanntlich *symmetrisch*.

(i) Zeigen Sie, dass jede Jordan-Matrix

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \lambda \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$$

das Produkt  $J_n(\lambda) = S \cdot T$  von zwei symmetrischen Matrizen  $S, T \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  ist.

(ii) Folgern Sie, dass jede Matrix  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  das Produkt von zwei symmetrischen Matrizen ist.

**Abgabe:** Bis Montag, den 02.05. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

**Zulassung zur Klausur/Nachklausur:** Bei 40 % = 96 Punkte auf den Übungszettel 1–12 und Vorrechnung einer Übungsaufgabe. Für Nebenfächler gilt das gleiche Kriterium.

**Termine:** Klausur am 16.7. und Nachklausur am 22.10.05. Mitbringen: Studentenausweis, Personalausweis, Papier, Stifte. Weitere erlaubte Hilfsmittel: keine.

Alle Informationen zur Vorlesung finden Sie auch auf der Webseite <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/%7Eag/lina2/>

## Übungen zur Linearen Algebra II

### Blatt 4

**Aufgabe 1.** Sei  $\Phi : V \times V \rightarrow K$  eine Hermitesche Form auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$ . Das *Radikal*  $V_0 \subset V$  ist der Untervektorraum aller Vektoren  $x \in V$ , für die  $\Phi(x, y) = 0$  für alle  $y \in V$  gilt.

(i) Prüfen Sie, dass die Abbildung

$$V/V_0 \times V/V_0 \longrightarrow K, \quad (a + V_0, b + V_0) \longmapsto \Phi(a, b)$$

wohldefiniert ist und eine nichtentartete Hermitesche Form auf  $V/V_0$  liefert.

(ii) Bestimmen Sie das Radikal der Hermitesche Form

$$\Phi(x, y) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ i & 2 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{pmatrix}$$

auf  $V = \mathbb{C}^3$ .

**Aufgabe 2.** (i) Zeigen Sie, daß  $\Phi(A, B) = \text{Tr}(A\bar{B}^t)$  ein komplexes Skalarprodukt auf dem Vektorraum  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  ist.

(ii) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement der antisymmetrischen Matrizen, und das orthogonale Komplement der Diagonalmatrizen.

(iii) Berechnen Sie jeweils die adjungierte Abbildung zu den Abbildungen  $A \mapsto A^t$ ,  $A \mapsto SA$ ,  $A \mapsto TAT^{-1}$ . Hierbei sind  $S \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  und  $T \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  vorgegeben.

**Aufgabe 3.** (i) Verifizieren Sie, daß  $\Phi(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)}dx$  ein komplexes Skalarprodukt auf dem Vektorraum  $V \subset \mathbb{C}[x]$  aller Polynome vom Grad  $\leq n$  ist.

(ii) Geben Sie für  $n = 4$  eine Basis für das orthogonale Komplement der konstanten Polynome an, und eine Basis für das orthogonale Komplement der Polynome mit  $f(0) = 0$ .

(iii) Berechnen Sie für  $n = 3$  die zu  $f \mapsto f'$  adjungierte Abbildung.

**Aufgabe 4.** Sei  $K$  ein Körper der Charakteristik  $\neq 2$ , und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Sei  $V = U \oplus U'$  eine Summenzerlegung und  $p : V \rightarrow V$  der entsprechende Projektor auf  $U = p(V)$  entlang  $U' = \ker(p)$ . Sei weiterhin  $V = W \oplus W'$  eine zweite Summenzerlegung und  $q : V \rightarrow V$  der Projektor auf  $W$  entlang  $W'$ .

(i) Zeigen Sie, daß  $p + q$  genau dann ein Projektor ist, wenn  $pq = qp = 0$  gilt.

(ii) Angenommen,  $p + q$  ist ein Projektor. Beweisen Sie, daß in diesem Falle  $V = U \oplus W \oplus (U' \cap W')$  gilt, und daß  $p + q$  der Projektor auf  $U \oplus W$  entlang  $U' \cap W'$  ist.

**Abgabe:** Bis Montag, den 9.5. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

Wegen dem Feiertag Christi Himmelfahrt werden die Übungsgruppen diese Woche vom Donnerstag, den 5.5. auf Freitag, den 6.5. verlegt. Gruppe 1 findet von 9–11 Uhr in 25.13.U1.33 statt, Gruppe 2 und 3 von 14–16 Uhr in 25.13.U1.30.

## Übungen zur Linearen Algebra II

### Blatt 5

**Aufgabe 1.** Sei  $f : V \rightarrow V$  ein normaler Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraumes  $V$ . Zeigen Sie: Wenn  $f^3 = f^2$ , dann ist  $f$  ein Projektor. Gilt diese Aussage auch für nichtnormale Endomorphismen?

**Aufgabe 2.** Sei  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraumes  $V$ , und  $f^* : V \rightarrow V$  seine adjungierte Abbildung. Beweisen Sie, daß  $f$  genau dann normal ist, wenn  $f^* = \sum_{i=0}^n \lambda_i f^i$  für ein Polynom  $\sum_{i=0}^n \lambda_i t^i \in \mathbb{C}[t]$  gilt.

**Aufgabe 3.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Ist  $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  eine Sesquilinearform, so zerlegen wir

$$\Phi(x, y) = B(x, y) + iC(x, y)$$

in Realteil  $B(x, y) \in \mathbb{R}$  und Imaginärteil  $C(x, y) \in \mathbb{R}$ .

(i) Verifizieren Sie, daß  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  und  $C : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  zwei  $\mathbb{R}$ -Bilinearformen auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  sind.

(ii) Zeigen Sie, daß die Bilinearformen  $B$  und  $C$  invariant unter der Multiplikation mit  $i \in \mathbb{C}$  sind. Mit anderen Worten, es gilt  $B(ix, iy) = B(x, y)$  und  $C(ix, iy) = C(x, y)$ .

(iii) Beweisen Sie, daß die Abbildung  $\Phi \mapsto B$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Bijektion zwischen dem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller Sesquilinearformen  $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  und dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller unter der Multiplikation mit  $i \in \mathbb{C}$  invarianten Bilinearformen  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  liefert.

(iv) Zeigen Sie, daß die drei Aussagen äquivalent sind:  $\Phi$  ist Hermitesch,  $B$  ist symmetrisch,  $C$  ist antisymmetrisch.



**Aufgabe 4.** Seien  $f, g : V \rightarrow V$  zwei diagonalisierbare Endomorphismen eines endlich-dimensionalen  $K$ -Vektorraumes  $V$ . Beweisen Sie, daß  $fg = gf$  genau dann gilt, wenn es eine Basis  $x_1, \dots, x_n \in V$  gibt so, daß sowohl  $f$  als auch  $g$  bezüglich dieser Basis durch Diagonalmatrizen beschrieben werden.

**Abgabe:** Bis Dienstag, den 17.5. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Wegen dem Feiertag Pfingstmontag wird das nächste Übungsblatt bereits in den Übungen am Donnerstag, den 12.5. ausgeteilt.

## Übungen zur Linearen Algebra II

### Blatt 6

**Aufgabe 1.** Sei  $f : V \rightarrow V$  ein Automorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraumes  $V$ , und  $f = s + a$  die Zerlegung in selbstadjungierten und antiselbstadjungierten Teil. Zeigen Sie, daß  $f$  genau dann normal ist, wenn  $sa = as$  gilt.

**Aufgabe 2.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Sei  $\lambda \in K$  ein Skalar, und  $V_\lambda \subset V$  der  $\lambda$ -Eigenraum und  $V^\lambda \subset V$  der verallgemeinerte  $\lambda$ -Eigenraum von  $f$ . Sei nun  $g : V \rightarrow V$  ein weiterer Endomorphismus mit  $fg = gf$ . Zeigen Sie, daß die Untervektorräume  $V_\lambda$  und  $V^\lambda$   $g$ -invariant sind.

**Aufgabe 3.** Bekanntlich besteht das *Zentrum*  $ZG$  einer Gruppe  $G$  aus allen Gruppenelementen  $a \in G$ , für die  $ga = ag$  für alle  $g \in G$  gilt. Beweisen Sie, daß das Zentrum  $ZU(n)$  der unitären Gruppe  $U(n)$  über dem Körper  $\mathbb{C}$  aus allen Skalarmatrizen  $A = \alpha E$  mit  $\alpha \in \mathbb{C}$  vom Betrag  $|\alpha| = 1$  besteht.

**Aufgabe 4.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus  $p : V \rightarrow V$ , der selbstadjungiert ist und dessen Eigenwerte reelle Zahlen  $\lambda_i \geq 0$  sind, heißt *nichtnegativ*. Sei nun  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus, der nicht notwendigerweise bijektiv ist.

(i) Beweisen Sie, daß es eine Polarzerlegung  $f = pu$  mit einem nichtnegativen Endomorphismus  $p$  und einem unitären Isomorphismus  $u$  gibt.

(ii) Zeigen Sie, daß diese Zerlegung genau dann eindeutig ist, wenn der Endomorphismus  $f$  bijektiv ist.

**Abgabe:** Bis Montag, den 23.5. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

## Übungen zur Linearen Algebra II

### Blatt 7

**Aufgabe 1.** Sei  $V$  ein unitärer Vektorraum und  $\Phi$  sein Skalarprodukt.

(i) Verifizieren Sie die Polarisierungsformel

$$\Phi(x, y) = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 + i \left\| \frac{x+iy}{2} \right\|^2 - i \left\| \frac{x-iy}{2} \right\|^2$$

für alle Vektoren  $x, y \in V$ .

(ii) Kann es nichtorthogonale Vektoren  $x, y \in V$  geben, für die Formel von Pythagoras  $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$  gilt?

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, daß es über den Körpern  $K = \mathbb{F}_2, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$  symmetrische  $2 \times 2$ -Matrizen gibt, die sich nicht diagonalisieren lassen.

**Aufgabe 3.** Sei  $V$  ein komplexer Vektorraum, und  $G \subset \text{Aut}(V)$  eine Untergruppe. Ein Skalarprodukt  $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *G-invariant*, wenn  $\Phi(gx, gy) = \Phi(x, y)$  für alle Gruppenelemente  $g \in G$  und alle Vektoren  $x, y \in V$  gilt.

(i) Sei  $G$  die Gruppe aller Skalarmultiplikationen  $g = \alpha \text{id}_V$  mit  $\alpha \in \mathbb{C}$  vom Betrag  $|\alpha| = 1$ . Verifizieren Sie, daß jedes Skalarprodukt  $G$ -invariant ist.

(ii) Angenommen,  $V \neq 0$  und  $G$  enthält eine Skalarmultiplikation  $g = \alpha \text{id}_V$  mit  $|\alpha| \neq 1$ . Zeigen Sie, daß kein Skalarprodukt  $G$ -invariant ist.

(iii) Sei nun  $G \subset \text{Aut}(V)$  eine endliche Untergruppe. Beweisen Sie, daß es ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt geben muss.

**Aufgabe 4.** Sei  $V$  ein komplexer Vektorraum,  $U = V$  der zugrundeliegende reelle Vektorraum, und

$$I : U \longrightarrow U, \quad x \longmapsto ix$$

die Skalarmultiplikation mit  $i \in \mathbb{C}$ , aufgefaßt als  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Wir betrachten nun die Komplexifizierung  $U_{\mathbb{C}} = U \oplus iU$  und die induzierte komplex-lineare Abbildung  $I_{\mathbb{C}} : U_{\mathbb{C}} \rightarrow U_{\mathbb{C}}$ . Seien  $V', V'' \subset U_{\mathbb{C}}$  die Eigenräume von  $I_{\mathbb{C}}$  zu den Eigenwerten  $i, -i \in \mathbb{C}$ .

- (i) Prüfen Sie, daß  $I$  nicht diagonalisierbar ist.
- (ii) Zeigen Sie, daß  $I_{\mathbb{C}}$  diagonalisierbar ist, und  $\pm i$  die einzigen Eigenwerte sind. Mit anderen Worten: die kanonische Abbildung  $V' \oplus V'' \rightarrow U_{\mathbb{C}}$  ist bijektiv.
- (iii) Beweisen Sie, daß die komplexe Konjugation  $\overline{x + iy} = x - iy$  auf  $U_{\mathbb{C}}$  diese beiden Eigenräume vertauscht, das heißt  $\overline{V'} = V''$ .
- (iv) Folgern Sie, daß  $U \cap V' = 0$  und  $U \cap V'' = 0$  gilt.

**Abgabe:** Bis Montag, den 30.5. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

Wegen dem Feiertag Fronleichnam werden die Übungsgruppen diese Woche vom Donnerstag, den 26.5. auf Freitag, den 27.5. verlegt. Gruppe 1 findet von 9–11 Uhr in 25.13.U1.33 statt, Gruppe 2 und 3 von 14–16 Uhr in 25.13.U1.30.

## Übungen zur Linearen Algebra II

### Blatt 8

**Aufgabe 1.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum, und  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Zeigen Sie, daß es eine Orthonormalbasis  $x_1, \dots, x_n \in V$  gibt so, daß die Matrix  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  von  $f$  zu dieser Basis eine obere Dreiecksmatrix ist. Kann man die Orthonormalbasis immer so wählen, daß  $A$  eine Jordan-Blockmatrix ist?

**Aufgabe 2.** (i) Zeigen Sie, daß  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  genau dann unitär ist, wenn es von der Form

$$A = \alpha \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$$

mit  $\|u\|^2 + \|v\|^2 = 1$  und  $|\alpha| = 1$  ist.

(ii) Zeigen Sie, daß  $B \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  genau dann orthogonal ist, wenn es von der Form

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\epsilon \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \epsilon \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

mit  $\varphi \in \mathbb{R}$  und  $\epsilon = \pm 1$  ist.

(iii) Wir versehen nun den  $\mathbb{R}^2$  mit der symmetrischen Bilinearform  $\Phi(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ . Beweisen Sie, daß  $C \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  genau dann eine Isometrie bezüglich  $\Phi$  ist, wenn es von der Form

$$C = \pm \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \epsilon \sinh(\phi) \\ \sinh(\phi) & \epsilon \cosh(\phi) \end{pmatrix}$$

mit  $\phi \in \mathbb{R}$  und  $\epsilon = \pm 1$  ist. Hierbei sind  $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$  und  $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$  der Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus.

**Aufgabe 3.** Sei  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraumes  $V$ . Beweisen Sie, daß  $\text{Tr}(f^*f) \geq 0$  gilt, und daß  $\text{Tr}(f^*f) = 0$  genau dann eintritt, wenn  $f = 0$ .

**Aufgabe 4.** Sei  $V \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  der reelle Untervektorraum, der von den drei *Pauli-Matrizen*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Wir definieren  $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\Psi : V \times V \rightarrow V$  durch

$$\Phi(A, B) = \text{Tr}\left(\frac{AB + BA}{4}\right) \quad \text{und} \quad \Psi(A, B) = \frac{AB - BA}{2i}.$$

(i) Verifizieren Sie, daß  $\Phi$  ein Skalarprodukt auf  $V$  ist, daß  $\|A\| = \sqrt{-\det(A)}$  gilt, und daß die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow V, \quad f(a) = a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3$$

eine Isometrie von euklidischen Vektorräumen ist.

(ii) Beweisen Sie, daß für jede unitäre Matrix  $S \in U(2)$  die Abbildung

$$g_S : V \longrightarrow V, \quad A \longmapsto SAS^{-1}$$

orthogonal ist, und daß  $U(2) \rightarrow O(V)$ ,  $S \mapsto g_S$  ein Gruppenhomomorphismus ist.

(iii) Sei  $S \in SU(2)$ , geschrieben als  $S = \rho E - iR$  mit  $\rho \in \mathbb{R}$  und  $R \in V$ . Zeigen Sie, daß für alle Vektoren  $A \in V$  die Formel

$$g_S(A) = (\rho^2 - \|R\|^2)A + 2\Phi(R, A)R + 2\rho\Psi(R, A)$$

gilt. Folgern Sie, daß die Rotationsachse von  $g_S$  durch  $\mathbb{R}R \subset V$  gegeben wird.

**Abgabe:** Bis Montag, den 6.6. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

## Übungen zur Linearen Algebra II

### Blatt 9

**Aufgabe 1.** Sei  $V$  ein Minkowski-Raum der Dimension  $n \geq 2$ . Wir wählen einen Vektor  $x \in V$ ,  $x \neq 0$  und betrachten sein orthogonales Komplement  $U = (\mathbb{R}x)^\perp$ . Berechnen Sie Dimension und Signatur von  $U$ , in Abhängigkeit davon, ob der Vektor  $x$  raumartig, zeitartig, oder lichtartig ist.

**Aufgabe 2.** Sei  $V \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  der reelle Vektorraum aller Hermiteschen Matrizen, versehen mit der Bilinearform

$$\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(A, B) = \det(A) + \det(B) - \det(A + B).$$

- (i) Zeigen Sie, daß  $\Phi$  von Signatur  $(3, 1)$  ist, und  $V$  somit ein Minkowski-Raum wird.
- (ii) Verifizieren Sie, daß ein Vektor  $A \in V$ ,  $A \neq 0$  genau dann raumartig ist, wenn  $\det(A) < 0$ , und genau dann zeitartig ist, wenn  $\det(A) > 0$ .
- (iii) Sei  $E \in V$  der durch die Einheitsmatrix gegebene zeitartige Vektor, und  $U \subset V$  sein orthogonales Komplement, und  $V = \mathbb{R}E \oplus U$  die induzierte orthogonale Zerlegung. Zeigen Sie, daß ein Vektor  $A \in V$  genau dann positive Zeitkoordinate bezüglich  $E$  hat, wenn  $\text{Tr}(A) > 0$ .
- (iv) Sei  $S \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ . Beweisen Sie, daß die Abbildung

$$g_S : V \longrightarrow V, \quad A \longmapsto SA\bar{S}^t$$

eine Isometrie des Minkowski-Raumes ist, und daß die induzierte Abbildung  $\text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow O(V)$ ,  $S \mapsto g_S$  ein Gruppenhomomorphismus ist.

**Aufgabe 3.** Sei  $f : U \rightarrow U$  ein Endomorphismus eines  $m$ -dimensionalen  $K$ -Vektorraumes, und  $g : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines  $n$ -dimensionalen  $K$ -Vektorraumes, und

$$f \otimes g : U \otimes V \longrightarrow U \otimes V, \quad x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y)$$

der induzierte Endomorphismus.

(i) Zeigen Sie  $\det(f \otimes g) = \det(f)^n \cdot \det(g)^m$ . Tip: Betrachten Sie die beiden Spezialfälle  $f = \text{id}_U$  und  $g = \text{id}_V$ .

(ii) Zeigen Sie weiterhin  $\text{Tr}(f \otimes g) = \text{Tr}(f) \text{Tr}(g)$ .

**Aufgabe 4.** Seien  $U, V$  zwei  $K$ -Vektorräume.

(i) Zu jedem  $(a, b) \in U \times V$  sei  $x_{a,b}$  ein formales Symbol. Wir betrachten den  $K$ -Vektorraum  $E = \bigoplus Kx_{a,b}$ , wobei die Summe über alle  $(a, b) \in U \times V$  läuft. Weiterhin sei  $R \subset E$  der Untervektorraum, der von den Vektoren

$$x_{\lambda a + a', b} - \lambda x_{a,b} - x_{a', b} \quad \text{und} \quad x_{a, \mu b + b'} - \mu x_{a,b} - x_{a, b'}$$

erzeugt wird, wobei  $a, a' \in U$  und  $b, b' \in V$  und  $\lambda, \mu \in K$ . Sei  $Q = E/R$  der Quotientenvektorraum. Beweisen Sie, daß

$$U \times V \longrightarrow Q, \quad (a, b) \longmapsto [x_{a,b}]$$

bilinear ist, und daß  $Q$  die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts besitzt. Mit anderen Worten, es gilt  $Q = U \otimes V$ .

(ii) Seien  $U, V$  nun endlich-dimensional. Sei  $B$  der  $K$ -Vektorraum der Bilinearformen  $\Phi : U \times V \rightarrow K$ , und  $B^\vee = \text{Hom}_K(B, K)$  sein Dualraum. Wir definieren eine Abbildung

$$\iota : U \times V \longrightarrow B^\vee, \quad (x, y) \longmapsto (\Phi \mapsto \Phi(x, y)).$$

Zeigen Sie, daß  $\iota$  bilinear ist, und daß  $B^\vee$  die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts besitzt. Es gilt also  $B^\vee = U \otimes V$ .

**Abgabe:** Bis Montag, den 13.6. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.



## Übungen zur Linearen Algebra II

### Blatt 10

**Aufgabe 1.** Seien  $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  zwei Hermitesche Matrizen. Wir wissen, daß die Eigenwerte von Hermiteschen Matrizen reelle Zahlen sind. Wir schreiben nun die Eigenwerte  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  von  $A$  der Größe nach angeordnet hin, wobei sie gemäß ihrer Multiplizität wiederholt werden. Entsprechend seien  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$  die Eigenwerte von  $B$ . Sind dann die  $n$  Summen

$$\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \dots, \lambda_n + \mu_n$$

die Eigenwerte der Hermiteschen Matrix  $C = A + B$ ?

**Aufgabe 2.** Seien  $U$  und  $V$  zwei  $K$ -Vektorräume.

(i) Seien  $a \in U$  und  $b \in V$  zwei Vektoren, und  $a \otimes b \in U \otimes V$  ihre Tensorprodukt. Zeigen Sie, daß  $a \otimes b = 0$  genau dann gilt, wenn entweder  $a = 0$  oder  $b = 0$ .

(ii) Seien nun  $a, a' \in U$  und  $b, b' \in V$  vier Vektoren, alle  $\neq 0$ . Beweisen Sie, daß  $a \otimes b = a' \otimes b'$  genau dann gilt, wenn es ein Skalar  $\lambda \in K$ ,  $\lambda \neq 0$  gibt so, daß  $a' = \lambda a$  und  $b' = \lambda^{-1}b$ .

(iii) Sei  $p > 0$  eine Primzahl. Wieviele der Vektoren  $x \in \mathbb{F}_p^m \otimes \mathbb{F}_p^n$  sind von der Form  $x = a \otimes b$  für gewisse  $a \in \mathbb{F}_p^m$  und  $b \in \mathbb{F}_p^n$ ? Wieviele sind nicht von dieser Form?

**Aufgabe 3.** (i) Sei  $U$  ein  $K$ -Vektorraum,  $V$  ein 1-dimensionaler  $K$ -Vektorraum, und  $b \in V$ ,  $b \neq 0$  ein Vektor. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$U \longrightarrow U \otimes V, \quad a \longmapsto a \otimes b$$

linear und bijektiv ist.

(ii) Seien  $U, V$  zwei  $K$ -Vektorräume von Dimension  $\geq 2$ . Zeigen Sie, daß das Bild der bilinearen Abbildung

$$U \times V \longrightarrow U \otimes V, \quad (a, b) \longmapsto a \otimes b$$

kein Untervektorraum des Tensorprodukts  $U \otimes V$  sein kann.

**Aufgabe 4.** Seien  $f : U \rightarrow U$  und  $g : V \rightarrow V$  Endomorphismen von endlich-dimensionalen Vektorräumen, und  $f \otimes g : U \otimes V \rightarrow U \otimes V$  der induzierte Endomorphismus auf dem Tensorprodukt.

(i) Beweisen Sie, daß  $f \otimes g$  genau dann nilpotent ist, wenn  $f$  oder  $g$  nilpotent ist.

(ii) Angenommen,  $f$  und  $g$  sind trigonalisierbar. Zeigen Sie, daß auch  $f \otimes g$  trigonalisierbar ist.

(iii) Folgt umgekehrt aus der Trigonalisierbarkeit von  $f \otimes g$ , daß  $f$  oder  $g$  trigonalisierbar ist?

**Abgabe:** Bis Montag, den 20.6. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

## Übungen zur Linearen Algebra II

### Blatt 11

**Aufgabe 1.** Sei  $A : K^3 \rightarrow K^3$  der durch eine  $3 \times 3$ -Matrix  $A = (\alpha_{ij})$  gegebene Endomorphismus.

(i) Drücken Sie die Koeffizienten  $c_1, c_2, c_3$  im charakteristischen Polynom  $\chi_A(t) = t^3 - c_1 t^2 + c_2 t - c_3$  durch die Matrixeinträge  $\alpha_{ij}$  aus.

(ii) Wählen Sie eine Basis  $x_1, x_2, x_3 \in \Lambda^2(K^3)$ , und berechnen Sie dazu die Matrix  $B$  der induzierten linearen Abbildung  $\Lambda^2(A) : \Lambda^2(K^3) \rightarrow \Lambda^2(K^3)$ .

(iii) Verifizieren Sie, daß  $\text{Tr}(B) = c_2$  gilt.

**Aufgabe 2.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum.

(i) Seien  $x, y \in V$  zwei Vektoren. Zeigen Sie, daß  $x \wedge y \in \Lambda^2(V)$  genau dann der Nullvektor ist, wenn  $x = \lambda y$  oder  $y = \lambda x$  für ein Skalar  $\lambda \in K$  gilt.

(ii) Sei  $e_i \in V$ ,  $i \in I$  eine Basis, und

$$x = \sum_i \lambda_i e_i, \quad y = \sum_i \mu_i e_i, \quad x' = \sum_i \lambda'_i e_i, \quad y' = \sum_i \mu'_i e_i$$

vier Vektoren aus  $V$ . Beweisen Sie, daß in  $\Lambda^2(V)$  genau dann  $x \wedge y = x' \wedge y'$  gilt, wenn  $\lambda_i \mu_j - \lambda_j \mu_i = \lambda'_i \mu'_j - \lambda'_j \mu'_i$  für alle Paare  $i < j$  aus  $I$  gilt.

(iii) Sei  $V = K^3$  und  $e_1, e_2, e_3 \in V$  die Standardbasis. Gegeben seien Vektoren  $x = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 \in V$  und

$$y = \lambda_1 e_2 \wedge e_3 + \lambda_2 e_1 \wedge e_3 + \lambda_3 e_1 \wedge e_2 \in \Lambda^2(V).$$

Stellen sie  $x \wedge y \in \Lambda^3(V)$  in der Form  $\alpha e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$  mit  $\alpha \in K$  dar.

**Aufgabe 3.** Sei  $f : V \rightarrow W$  ein Homomorphismus von  $K$ -Vektorräumen. Beweisen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Die lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  hat Rang  $< r$ .
- (ii) Die induzierte lineare Abbildung  $\Lambda^r(f) : \Lambda^r(V) \rightarrow \Lambda^r(W)$  ist die Nullabbildung.

**Aufgabe 4.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\Phi$ . Ist  $y \in V$  ein Vektor  $y \neq 0$ , so definieren wir einen Endomorphismus

$$s_y : V \longrightarrow V, \quad x \longmapsto x - 2 \frac{\Phi(x, y)}{\Phi(y, y)} y.$$

- (i) Zeigen sie  $s_y(y) = -y$ , und  $s_y(x) = x$  für  $x \in (\mathbb{R}y)^\perp$ , sowie  $s_y^2 = \text{id}_V$ . Verifizieren Sie weiterhin, daß die lineare Abbildung  $s_y$  orthogonal ist.
- (ii) Sei  $\varphi \in \mathbb{R}$  ein vorgegebener Winkel. Setzen wir  $y = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ . Finden Sie einen Vektor  $y' \in \mathbb{R}^2$  mit

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = s_{y'} \circ s_y.$$

- (iii) Folgern Sie, daß jede orthogonale Abbildung  $f : V \rightarrow V$  von der Form  $f = s_{y_1} s_{y_2} \dots s_{y_n}$  für gewisse Vektoren  $y_1, \dots, y_n \in V$  ist.

**Abgabe:** Bis Montag, den 27.6. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

**Klausur/Nachklausur:** Alle Bachelor-Mathematik-Studenten müssen sich im Prüfungssekretariat (Raum 25.13.03.32, Frau Simons) diese Woche zur Klausur/Nachklausur anmelden.

Unabhängig davon müssen sich alle Studenten in dieser Woche in der Vorlesung oder den Übungen zur Klausur/Nachklausur anmelden.

Um zu Klausur/Nachklausur zugelassen zu werden, müssen Sie bis Blatt 12 96 Punkte erreicht und einmal vorgerechnet haben.

**Proseminar im WS 05/06:** Im Wintersemester findet ein Proseminar über *Darstellungen von endlichen Gruppen* statt, das speziell auf Sie zugeschnitten ist. Schauen Sie sich den Aushang an. Eine Vorbesprechung findet am Montag, den 18.7. nach der Vorlesung statt. Alle interessierten Studenten sind herzlich eingeladen.

## Übungen zur Linearen Algebra II

### Blatt 12

**Aufgabe 1.** Sei  $A \in SO(3)$  ein Element der speziellen orthogonalen Gruppe, also eine reelle  $3 \times 3$ -Matrix mit  $AA^t = E$  und  $\det(A) = 1$ . Sei  $m \geq 0$  die geometrische Multiplizität zum Eigenwert  $\lambda = 1$ .

- (i) Zeigen Sie, daß  $m \geq 1$  gilt, und daß  $m \geq 2$  genau dann gilt, wenn  $A = E$ .
- (ii) Gilt diese Aussage auch für Matrizen  $A \in O(3)$ ?

**Aufgabe 2.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum der Dimension  $n = \dim(V)$ , und sei  $0 \leq k \leq n$  eine natürliche Zahl. Beweisen Sie, daß die bilineare Abbildung

$$\Phi : \Lambda^k(V) \times \Lambda^{n-k}(V) \longrightarrow \Lambda^n(V), \quad (x, y) \longmapsto x \wedge y$$

nichtentartet ist. Mit anderen Worten: Zu jedem  $x \neq 0$  gibt es ein  $y$  mit  $x \wedge y \neq 0$ , und zu jedem  $y \neq 0$  gibt es ein  $x$  mit  $x \wedge y \neq 0$ .

**Aufgabe 3.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum von gerader Dimension  $\dim(V) = 2n$ .

- (i) Seien  $a_1, \dots, a_n \in V$ , und  $y = a_1 \wedge \dots \wedge a_n$  der resultierende Vektor in der äußeren Potenz  $\Lambda^n(V)$ . Zeigen Sie, daß  $y \wedge y = 0$  in  $\Lambda^{2n}(V)$  gilt.
- (ii) Sei nun  $V$  von Dimension 4, und  $e_1, \dots, e_4 \in V$  eine Basis, und die Charakteristik von  $K$  sei  $\neq 2$ . Folgern Sie aus (i), daß der Vektor

$$y = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \Lambda^2(V)$$

sich nicht als  $y = a_1 \wedge a_2$  mit  $a_1, a_2 \in V$  schreiben läßt.

**Aufgabe 4.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, und  $U, U' \subset V$  zwei Untervektorräume, und  $n \geq 0$  eine natürliche Zahl. Wir erhalten drei Untervektorräume

$$\Lambda^n(U), \quad \Lambda^n(U'), \quad \Lambda^n(U \cap U')$$

in der äußeren Potenz  $\Lambda^n(V)$ . Beweisen Sie, daß

$$\Lambda^n(U) \cap \Lambda^n(U') = \Lambda^n(U \cap U')$$

gilt.

**Abgabe:** Bis Montag, den 4.7. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

## Übungen zur Linearen Algebra II

### Blatt 13

**Aufgabe 1.** Sei  $GL^+(\mathbb{R})$  die Gruppe aller reellen  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante  $\det(A) > 0$ , und  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$  die *obere Halbebene*. Für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad z \in \mathbb{H}$$

definieren wir  $Az = \frac{az+b}{cz+d}$ . Verifizieren Sie, daß die komplexe Zahl  $Az$  in der oberen Halbebene liegt, und rechnen Sie nach, daß die Abbildung

$$GL_2^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad (A, z) \longmapsto Az$$

eine Gruppenwirkung ist. Mit anderen Worten: Es gilt  $Ez = z$  für die Einheitsmatrix  $E$ , und es gilt  $A(Bz) = (AB)z$  für alle  $A, B \in GL_2^+(\mathbb{R})$ .

**Aufgabe 2.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, und  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus mit Determinante  $\det(f) = 1$ . Wir setzen  $\zeta = e^{2\pi i/n}$ . Beweisen Sie, daß die  $n$ -ten Einheitswurzeln  $1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1} \in \mathbb{C}$  genau dann Eigenwerte von  $f$  sind, wenn die Endomorphismen  $\Lambda^r(f) : \Lambda^r(V) \rightarrow \Lambda^r(V)$  für  $r = 1, \dots, n-1$  Spur Null haben.

**Aufgabe 3.** Beweisen Sie, daß die Gruppe  $H = SO(2) \times SO(2)$  nicht isomorph zu einer Untergruppe von  $G = SO(3)$  ist.

**Aufgabe 4.** (i) Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, versehen mit einer Bilinearform  $\Phi : V \times V \rightarrow K$ , und  $r \geq 0$  eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, daß es genau eine Bilinearform  $\Psi : \Lambda^r(V) \times \Lambda^r(V) \rightarrow K$  gibt mit

$$\Psi(x_1 \wedge \dots \wedge x_r, y_1 \wedge \dots \wedge y_r) = \det(\Phi(x_i, y_j)_{1 \leq i, j \leq r})$$

für alle  $x_1, \dots, x_r \in V$  und  $y_1, \dots, y_r \in V$ . Man bezeichnet diese Bilinearform auch als die  $r$ -te *äußere Potenz* von  $\Phi$  und schreibt  $\Psi = \Lambda^r(\Phi)$ .

(ii) Angenommen,  $V$  ist ein reeller Vektorraum, und  $\Phi$  ist ein Skalarprodukt auf  $V$ . Zeigen Sie, daß dann auch  $\Lambda^r(\Phi)$  ein Skalarprodukt auf  $\Lambda^r(V)$  ist.

**Abgabe:** Bis Montag, den 11.7. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

**Tutorium für Nachklausur:** Vom 10.–13.10. wird es ein Tutorium geben, das von Frau Yulia Polyakova und Herrn Sasa Novakovich geleitet wird. Das Tutorium gibt ihnen Gelegenheit, Begriffe zu wiederholen, Fragen zu stellen, Aufgaben durchzurechnen, und sich so auf die Nachklausur vorzubereiten. Näheres wird durch Aushang bekannt gegeben.

**Proseminar im WS 05/06:** Im Wintersemester findet ein Proseminar über *Darstellungen von endlichen Gruppen* statt, das speziell auf Sie zugeschnitten ist. Schauen Sie sich den Aushang an. Eine Vorbesprechung findet am Montag, den 18.7. nach der Vorlesung im Seminarraum 25.22.02.81 statt. Alle interessierten Studenten sind herzlich eingeladen.