Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 04/05

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 1

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ und alle Skalare $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ die folgenden Aussagen über Winkel gelten:

(i) $\sphericalangle(x, y) = \sphericalangle(y, x)$.

(ii) $\sphericalangle(x, x) = 0$ und $\sphericalangle(-x, x) = \pi$.

(iii) $\sphericalangle(\lambda x, y) = \sphericalangle(x, y)$ falls $\lambda > 0$, und $\sphericalangle(\lambda x, y) = \pi - \sphericalangle(x, y)$ falls $\lambda < 0$.

(iv) Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit $z \neq 0$ gilt $\sphericalangle(z, iz) = \pi/2$.

Aufgabe 2. Sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl mit Real- und Imaginärteil $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $(x + yi)^2 = z$ für

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \quad \text{und} \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

gilt, sofern man die Vorzeichen richtig wählt.

Aufgabe 3. Die Binomialkoeffizienten erfüllen zahlreiche Identitäten, zum Beispiel

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \text{für alle ganzen Zahlen } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

(i) Verifizieren Sie diese Identität durch explizites Ausrechnen in den vier Spezialfällen $n = 3, k = 1$ und $n = 4, k = 2$ und $n = k$ und $k = 0$.

(ii) Beweisen Sie diese Identität durch vollständige Induktion.

(iii) Zeigen Sie weiterhin die Formel

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0 \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Aufgabe 4. Sei $n \neq 0$ eine ganze Zahl. Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt *n-te Einheitswurzel*, falls $z^n = 1$ gilt.

(i) Zeigen Sie, daß die n-ten Einheitswurzeln genau die komplexen Zahlen $z = e^{2\pi ik/n}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ sind. Wie viele n-te Einheitzwurzeln gibt es?

(ii) Skizzieren Sie die n-ten Einheitswurzeln in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ in den Spezialfällen $n = 2, 3, 4, 5$.

(iii) Sei $\zeta = e^{2\pi i/n}$. Beweisen Sie die Formeln

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = 0 \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \zeta^k = (-1)^{n-1}.$$

(iv) Sei $w \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $w \neq 0$. Beweisen Sie, daß es genau n komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = w$ gibt.

Abgabe: Bis Montag der 25.10. um 11:00 Uhr st in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 04/05

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 2

Aufgabe 1. (i) Bestimmen Sie alle Einheiten $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und ihre multiplikativen Inversen a^{-1} in den Spezialfällen $n = 9$ und $n = 24$.

(ii) Beweisen Sie, daß eine Kongruenzklasse $[k] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann einen Einheit ist, wenn $\operatorname{ggT}(k, n) = 1$ gilt.

(iii) Eine Ringelement $a \in R$ heißt *Quadrat*, falls es ein $b \in R$ mit $b^2 = a$ gibt. Bestimmen Sie alle Quadrate in den Körpern $\mathbb{F}_p$ für die Spezialfälle $p = 3, 5, 7, 11$. Wieviele Quadrate gibt es jeweils? Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 2. (i) Sind die Vektoren

$$(1, 2, 3), (1, 2, i), (0, 0, 3i + 1) \in \mathbb{C}^3$$

linear unabhängig?

(ii) Sei $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir definieren Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sin(2^{-n}x).$$

Zeigen Sie, daß die Vektoren $f_0, f_1, f_2 \in V$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 3. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ zwei ganze Zahlen mit $n \neq 0$. Division mit Rest liefert eine Darstellung

$$m = nq + r \quad \text{mit } 0 \leqslant r < |n|$$

mit eindeutig bestimmten ganzen Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$. Im *Euklidischen Algorithmus* definiert man induktiv zwei Folgen ganzer Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{k+1}$ und $q_1, \ldots, q_k$ durch $a_0 = m$, $a_1 = n$, und

$$a_{i-1} = a_i q_i + a_{i+1} \quad \text{mit } 0 \leqslant a_{i+1} < |a_i|.$$

Der Algorithmus bricht ab im Schritt $k + 1$ sobald $a_{k+1} = 0$.

(i) Führen Sie den Euklidischen Algorithmus im Spezialfall $m = -89$ und $n = 157$ durch.

(ii) Beweisen Sie, daß der Euklidische Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler berechnet: Es gilt $a_k = \mathrm{ggT}(m, n)$.

(iii) Zeigen Sie durch Induktion nach k, daß der Euklidische Algorithmus auch die *Kettenbruchentwicklung* liefert: Es gilt

$$\frac{m}{n} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{k-1} + \cfrac{1}{q_k}}}}$$

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen. In Analogie zu den komplexen Zahlen machen wir die vierelementige Menge $R = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ zu einem Ring mit Addition

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

und Multiplikation

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$

(i) Ist der Ring R ein Körper?

(ii) Erhält man einen Körper, wenn man $\mathbb{F}_2$ durch $\mathbb{F}_3$ ersetzt?

Abgabe: Bis **Dienstag, den 2.11. um 9:00 Uhr st** in den Zettelkästen.

Zulassung zur Klausur/Nachklausur: Bei 40 % der Punkte auf den Übungszettel und Vorrechnung einer Übungsaufgabe. Für Nebenfachscheine werden die Kriterien auf 32 % der Punkte abgesenkt, und die Pflicht zum Vorrechnen entfällt.
Termine: Klausur am 29.1.05, Nachklausur am 16.4.05. Mitbringen: Studentenausweis und Personalausweis. Erlaubte Hilfsmittel: keine.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 04/05

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Indem man die Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \to V$ auf $\mathbb{R} \times V$ einschränkt, wird die abelsche Gruppe V zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(i) Sei $x_1, \ldots, x_n \in V$ eine $\mathbb{C}$-Basis (das heißt, eine Basis von V als $\mathbb{C}$-Vektorraum), und $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit Imaginärteil $\neq 0$. Beweisen Sie, daß die Vektoren

$$x_1, \ldots, x_n, \xi_1 x_1, \ldots, \xi_n x_n \in V$$

eine $\mathbb{R}$-Basis bilden.

(ii) Folgern Sie aus dem Vorangegangenen, daß

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \cdot \dim_{\mathbb{C}}(V)$$

gilt.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen V, W. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Die lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann surjektiv, wenn es eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$ gibt.

(ii) Die lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn es eine lineare Abbildung $h : W \to V$ mit $h \circ f = \mathrm{id}_V$ gibt.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Ein Untervektorraum $H \subset V$ mit $\dim_K(V/H) = 1$ bezeichnet man als *Hyperebene.* Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Zu jeder Hyperebene $H \subset V$ gibt es eine surjektive lineare Abbildung $f : V \to K$ mit $H = \mathrm{kern}(f)$.

(ii) Für jeden Untervektorraum $U \subset V$ gilt

$$U = \bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha,$$

wobei $H_\alpha \subset V$, $\alpha \in I$ die Familie aller Hyperebenen mit $U \subset H_\alpha$ ist.

Aufgabe 4. Ein Untervektorraum $L \subset V$ mit $\dim_K(L) = 1$ bezeichnet man als *Gerade.*

(i) Geben Sie alle Geraden im $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $V = \mathbb{F}_3^2$ an.

(ii) Sei nun V ein n-dimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum, wobei $p > 0$ eine Primzahl ist. Zeigen Sie, daß es genau p^n Vektoren $x \in V$ gibt, und daß es genau

$$\sum_{i=0}^{n-1} p^i = p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1$$

Geraden $L \subset V$ gibt.

Abgabe: Bis Montag, den 8.11. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

Zulassung zur Klausur/Nachklausur: Bei 40 % der Punkte auf den Übungszettel und Vorrechnung einer Übungsaufgabe. Für Nebenfachscheine werden die Kriterien auf 32 % abgesenkt, und die Pflicht zum Vorrechnen entfällt.

Termine: Klausur am 29.1.05, Nachklausur am 16.4.05. Mitbringen: Studentenausweis, Personalausweis, Papier, Stifte. Weitere erlaubte Hilfsmittel: keine.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 04/05

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 4

Aufgabe 1. (i) Für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ werde die drei Vektoren

$$(0,1,1),(4,1,0),(1,t,t^2) \in \mathbb{R}^3$$

linear abhängig?

(ii) Für welche Primzahlen $p > 0$ werden die beiden Vektoren

$$([1],[12]),([2],[3]) \in \mathbb{F}_p^2$$

linear abhängig?

Aufgabe 2. Man bezeichnet einen Untervektorraum $U \subset V$ als *echten* Untervektorraum falls $U \neq V$.

(i) Kann ein echter Untervektorraum eines endlich-dimensionalen Vektorraumes die gleiche Dimension haben wie der Vektorraum?

(ii) Kann ein Vektorraum die Vereinigungsmenge von zwei echten Untervektorräumen sein?

(iii) Gibt es einen Vektorraum, der die Vereinigungsmenge von drei echten Untervektorräumen ist?

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, und $U, U' \subset V$ zwei Untervektorräume. Wir betrachten den Homomorphismus

$$f : V \longrightarrow V/U \oplus V/U', \quad x \longmapsto (x+U, x+U').$$

Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $U \cap U' = 0$ gilt.

(ii) Die Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn $U + U' = V$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Seien $V' \subset V$ und $W' \subset W$ Untervektorräume mit $f(V') \subset W'$.

(i) Zeigen Sie, daß $f : V \to W$ eine lineare Abbildung $\bar{f} : V/V' \to W/W'$ induziert, sodaß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{pr}} & V/V' \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \bar{f}} \\ W & \xrightarrow[\text{pr}]{} & W/W' \end{array}$$

kommutativ ist.

(ii) Beweisen Sie, daß $f : V \to W$ bijektiv ist, falls die beiden Abbildungen

$$f' : V' \longrightarrow W', x \longmapsto f(x) \quad \text{und} \quad \bar{f} : V/V' \longrightarrow W/W'$$

bijektiv sind.

Abgabe: Bis Montag, den 15.11. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

Pro Übungsaufgabe kann man 5 Punkte erreichen.

Zulassung zur Klausur/Nachklausur: Bei 40 % der Punkte auf den Übungszettel und Vorrechnung einer Übungsaufgabe. Für Nebenfachscheine werden die Kriterien auf 32 % abgesenkt, und die Pflicht zum Vorrechnen entfällt.

Termine: Klausur am 29.1.05, Nachklausur am 16.4.05. Mitbringen: Studentenausweis, Personalausweis, Papier, Stifte. Weitere erlaubte Hilfsmittel: keine.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 04/05

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 5

Aufgabe 1.

Aufgabe 2. (i) Sei R ein assoziativer Ring (zum Beispiel $R = \mathrm{Mat}_n(K)$). Für $a, b \in R$ definiert man die *Lie-Klammer* $[a, b] \in R$ durch

$$[a, b] = ab - ba.$$

Rechnen Sie nach, daß die Lie-Klammer *alternierend* ist, daß heisst, es gilt $[a, a] = 0$, und die *Jakobi-Identität*

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$$

für alle $a, b, c \in R$ erfüllt.

(ii) Rechnen Sie die Lie-Klammern $[A_i, A_j] \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$ für die 2×2-Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

aus.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, V der K-Vektorraum aller Polynome $p(t) = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i t^i$ vom Grad $\leqslant 3$ mit Koeffizienten $\lambda_0, \ldots \lambda_3 \in K$, und

$$\frac{\partial}{\partial t} : V \longrightarrow V, \quad p(t) = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i t^i \longmapsto p'(t) = \sum_{i=1}^{3} i\lambda_i t^{i-1}$$

der Ableitungsoperator.

(i) Überprüfen Sie, daß der Ableitungsoperator eine linear Abbildung ist.

(ii) Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(K)$ von $\partial/\partial t$ bezüglich der Basen $1, t, t^2, t^3 \in V$ und $1, t, t^2, t^3 \in V$.

(iii) Wir definieren Polynome $p_j(t) = 1 + t + \ldots + t^j$. Bestimmen Sie die Matrix $B \in \mathrm{Mat}_4(K)$ von $\partial/\partial t$ bezüglich der Basen $p_0(t), \ldots, p_3(t) \in V$ und $p_0(t), \ldots, p_3(t) \in V$.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper.

(i) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes V. Zeigen Sie, daß die lineare Abbildung f genau dann injektiv ist, wenn sie surjektiv ist.

(ii) Wir fassen den Summenvektorraum $\bigoplus_{n=0}^{\infty} K$ in kanonischer Weise als Untervektorraum des Produktvektorraumes $\prod_{n=0}^{\infty} K$ auf. Beweisen Sie, daß der Quotientenvektorraum

$$V = \prod_{n=0}^{\infty} K / \bigoplus_{n=0}^{\infty} K,$$

unendlich-dimensional ist.

Abgabe: Bis Dienstag, der 2.11. um 9:00 Uhr st in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 04/05

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 6

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden komplexen Matrizen invertierbar sind, und berechnen sie gegebenenfalls die inverse Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & i & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und $U = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ die Teilmenge aller Funktionen $f(x)$, deren höhere Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots$ existieren.

(i) Verifizieren Sie, daß $U \subset V$ eine Untervektorraum ist.

(ii) Wir betrachten nun den *Differentialoperator* $\delta : U \to U$, $f \mapsto 2f'' - f$. Verifizieren Sie, daß $\delta : U \to U$ eine lineare Abbildung ist.

(iii) Sei nun $L \subset U$ der Kern von $\delta : U \to U$, also die Lösungsmenge der homogenen linearen *Differentialgleichung* $2f'' = f$. Finden Sie durch Probieren zwei Vektoren $f_1, f_2 \in L$, die linear unabhängig sind, und beweisen sie deren lineare Unabhängigkeit.

(iv) Berechnen Sie die *Wronskische Determinante*

$$W(f_1, f_2) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix} = f_1 f_2' - f_2 f_1'.$$

Anmerkung: In der Theorie der Differentialgleichungen beweist man, daß für derartige Differentialgleichungen der Lösungsraum L 2-dimensional ist, und daß $f_1, f_2 \in L$ genau dann eine Basis bilden, wenn die Wronskische Determinante keine Nullstelle hat.

Aufgabe 3. (i) Berechnen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Lösungsräume des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ und $Bx = 0$ für die folgenden beiden komplexen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 13 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ i & 2i & i & 8i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ i & i & 5i \end{pmatrix}$$

(ii) Geben Sie eine Basis der Lösungsräume an.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Seien $f, g : V \to V$ zwei lineare Abbildungen. Wir schreiben $f \sim g$, falls es bijektive lineare Abbildungen $h, k : V \to V$ mit $f \circ h = k \circ g$ gibt. Dies definiert auf der Menge $\mathrm{End}_K(V)$ der Endomorphismen eine Relation.

(i) Überprüfen Sie, daß diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Zeigen sie, daß äquivalente Endomorphismen den gleichen Rang haben.

(iii) Beweisen Sie, daß es genau $n + 1$ Äquivalenzklassen $[f]$ gibt.

Abgabe: Bis Montag, den 29.11. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 04/05

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $t \in \mathbb{Q}$. In Abhängigkeit von t definieren wir eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{3,4}(\mathbb{Q})$ und einen Vektor $b \in \mathbb{Q}^3$ durch

$$A = \begin{pmatrix} -2t & -4 & 2t-20 & 7t^2+7t-14 \\ 7t & 14 & -7t+72 & -23t^2-23t+46 \\ t & 2 & -t+10 & -3t^2-3t+6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 7t-29 \\ -23t+102 \\ -3t+14 \end{pmatrix}$$

Für welche $t \in \mathbb{Q}$ läßt sich das inhomogene lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösen? Für welche dieser t ist die Lösung eindeutig?

Aufgabe 2. Sei $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren höhere Ableitungen $f', f'', \ldots$ existieren. Wir betrachten hier den Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$.

(i) Verifizieren Sie, daß die drei folgenden Abbildungen $\delta, \iota, \alpha : V \to \mathbb{R}$ linear sind, also Elemente aus V^*:

$$\delta(f) = f(0), \quad \iota(f) = \int_0^1 f(x)dx, \quad \alpha(f) = f'(0).$$

(ii) Sei $(\partial/\partial x)(f) = f'$ der Ableitungsoperator, aufgefaßt als lineare Abbildungen $\partial/\partial x : V \to V$. Rechnen Sie nach, daß für die duale Abbildung $(\partial/\partial x)^* : V^* \to V^*$ gilt: $(\partial/\partial x)^*(\delta) = \alpha$.

(iii) Beweisen Sie, daß die drei Linearformen $\delta, \iota, \alpha \in V^*$ linear unabhängig sind.

Anmerkung: Man bezeichnet die stetigen Linearformen $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ als *Distributionen*. Sie sind 1947 von Laurent Schwartz eingeführt worden, womit eine beträchtliche Konfusion beseitigt wurde. Die Linearform $\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^*$, welche als *Diracsche δ-Funktion* bezeichnet wird, stellte man sich ursprünglich als ,,Funktion" vor, die an der Stelle $x = 0$ den Wert $+\infty$ hat, und sonst konstant Null ist.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, und $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine obere Dreiecksmatrix, also $\alpha_{ij} = 0$ für $i > j$. Wir betrachten das n-fache Matrizenprodukt

$$A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ Faktoren}} \in \mathrm{Mat}_n(K).$$

Beweisen Sie, daß $A^n = 0$ genau dann gilt, wenn alle Diagonaleinträge von A verschwinden: $\alpha_{11} = \ldots = \alpha_{nn} = 0$.

Aufgabe 4. Wir betrachten die folgenden komplexen 2×2-Matrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, daß $E, I, J, K \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ eine $\mathbb{C}$-Basis bilden.

(ii) Rechnen Sie die Matrizenprodukte

$$I^2, J^2, K^2 \quad \text{und} \quad JK, IK, IJ \quad \text{und} \quad KJ, KI, JI$$

aus.

(iii) Sei $\mathbb{H} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ der $\mathbb{R}$-Untervektorraum, der von den vier Matrizen E, I, J, K erzeugt wird. Folgern Sie aus (ii), daß $\mathbb{H} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ ein assoziativer Unterring ist, dessen Zentrum aus den Matrizen λE, $\lambda \in \mathbb{R}$ besteht.

(iv) Beweisen Sie mittels Determinante, daß jedes $X \in \mathbb{H}$, $X \neq 0$ eine invertierbare Matrix ist, und daß für die inverse Matrix gilt $X^{-1} \in \mathbb{H}$.

Anmerkung: Die Elemente von $\mathbb{H}$ heißen *Quaternionen*. Sie sind 1835 von William Hamilton entdeckt worden, nachdem er jahrelang vergeblich eine Körperstruktur auf dem $\mathbb{R}^3$ gesucht hat. Die Menge der Quaternionen $\mathbb{H}$ ist das einfachste Beispiel für *Divisonsringe*, welche auch unter dem Namen *Schiefkörper* bekannt sind.

Abgabe: Bis Montag, den 6.12. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 04/05

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 1. (i) Bestimmen Sie Zyklenzerlegung und Signum der Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 4 & 1 & 9 & 10 & 3 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

und

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_n$$

(ii) Schreiben Sie den Zyklus

$$(1, 2, \dots, n) \in S_n$$

als Produkt von Transpositionen.

Aufgabe 2. (i) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_2)$. Verifizieren Sie die Identität

$$(A + B)^2 = A^2 - [A, B] + B^2.$$

(ii) Seien nun $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_3)$. Verifizieren Sie die Identität

$$(X + Y)^3 = X^3 - [Y, [X, Y]] - \frac{1}{2}[X, [X, Y]] + Y^3.$$

Anmerkung: Die obigen Identit"aten sind die einfachsten Spezialfälle einer 1941 von Nathan Jacobson gefundenen Formel, mit der in assoziativen $\mathbb{F}_p$-Algebren die p-te Potenz einer Summe durch geschachtelte Lie-Klammern $[A, B] = AB - BA$ der Summanden ausdrückt wird. Die Formel ist leider zu kompliziert, um hier wiedergegeben zu werden.

Aufgabe 3. (i) Sei K ein Körper, und $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, t \in K$. Wir definieren eine $n \times n$-Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} t & & & & & \alpha_0 \\ -1 & t & & & & \alpha_1 \\ & -1 & t & & & \alpha_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & t & \alpha_{n-2} \\ & & & & -1 & t+\alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie durch Laplace-Entwicklung und Induktion nach n, daß

$$\det(A_n) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0.$$

(ii) Sei K ein Körper, und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Wir definieren

$$C_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & & & & \\ -1 & \alpha_2 & 1 & & & \\ & -1 & \alpha_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \alpha_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie durch Laplace-Entwicklung und Induktion nach n, daß gilt:

$$\frac{C_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{C_{n-1}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)} = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\alpha_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_n}}}}$$

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix, und

$$B = ((-1)^{i+j} \det(A^{ij})) \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

ihre Kofaktormatrix.

(i) Zeigen Sie, daß $\det(B) = \det(A)^{n-1}$ gilt.

(ii) Beweisen Sie, daß $B = 0$ genau dann gilt, wenn $\mathrm{rank}(A) < n - 1$.

Abgabe: Bis Montag, den 13.12. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

Das Tutorium findet ab Freitag, den 10.12. zur gewohnten Zeit 14-16 Uhr ct im Seminarraum 25.13.U1.33 statt.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 04/05

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q}).$$

(i) Prüfen Sie, ob A invertierbar ist.

(ii) Berechnen Sie die inverse Matrix mit der Cramerschen Regel.

(iii) Berechnen Sie die inverse Matrix mit dem Gauß-Algorithmus.

Aufgabe 2. Sei $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$. Wir nehmen an, daß die Matrix A invertierbar ist, und daß ihre Einträge α_{ij} ganze Zahlen sind.

(i) Sei $B = (\beta_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$ die zu A inverse Matrix. Beweisen Sie, daß die Einträge β_{ij} genau dann ganze Zahlen sind, wenn $\det(A) = \pm 1$ gilt.

(ii) Zu jeder Primzahl $p > 0$ sei $A_p = ([\alpha_{ij}])$ die Matrix, die durch Bildung der Kongruenzklassen von α_{ij} modulo p entsteht. Beweisen Sie, daß für fast alle Primzahlen $p > 0$ die Matrix $A_p \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ invertierbar ist.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper. Wir fassen den Summenvektorraum

$$S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \mid \lambda_n \in K \text{ und } \lambda_n = 0 \text{ für fast alle } n\}$$

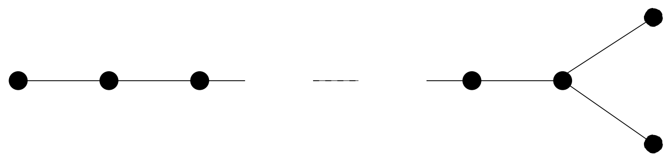
in kanonischer Weise als Untervektorraum des Produktvektorraumes

$$P = \prod_{n=0}^{\infty} K = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \mid \lambda_n \in K\}$$

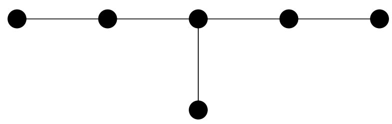
auf. Beweisen Sie, daß der Quotientenvektorraum $V = P/S$ unendlich-dimensional ist. (Tip: Konstruieren Sie einen Endomorphismus $f : V \to V$, der surjektiv aber nicht injektiv ist.)

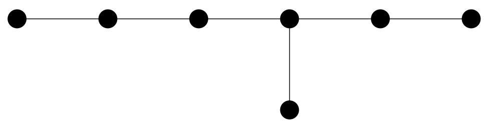
Aufgabe 4. Unter einem *Graph* versteht man eine Menge von Ecken, von denen einige durch Kanten verbunden sind. Der Graph

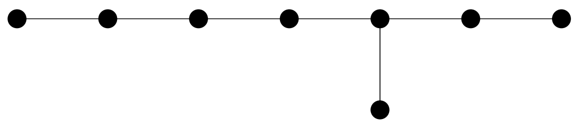
wird beispielsweise als A_n bezeichnet. (Der Index n ist immer die Anzahl der Ecken.) Der folgende Graph trägt den Namen D_n, $n \geq 4$:



Die nächsten drei Graphen heißen E_6, E_7, und E_8:







Ist Γ ein Graph mit n Ecken $e_1, \ldots, e_n$, so definiert man dazu eine $n \times n$-Matrix $A = (\alpha_{ij})$ durch

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -2 & \text{falls } i = j, \\ 1 & \text{falls die Ecken } e_i, e_j \text{ durch eine Kante verbunden sind,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dazu bildet man die Determinante $d(\Gamma) = \det(A)$. Berechenen sie die Determinante $d(\Gamma)$ für die Graphen $\Gamma = A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$. (Diese Graphen gehören zu den *Dynkin-Diagrammen*, welche bei der Klassifikation der *algebraischen Gruppen* eine entscheidene Rolle spielen.)

Abgabe: Bis Montag, den 20.12. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 04/05

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 10

Aufgabe 1. Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus zu den folgenden Polynomen $f, h \in \mathbb{Q}[t]$ den größten gemeinsamen Teiler $g = \mathrm{ggT}(f, h)$, und geben Sie jeweils Polynome $a, b \in \mathbb{Q}[t]$ mit $g = af + bh$ an.

(i) $f = t^5 + t - 1$ und $h = t^4 - t^2 + 1$.

(ii) $f = t^4 + t^2 + 1$ und $h = t^2 + t + 1$.

Aufgabe 2. Man bezeichnet eine Matrix $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ als *Zirkulante*, falls es Skalare $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$ gibt mit

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n-1} \\ \lambda_{n-1} & \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{n-2} \\ \lambda_{n-2} & \lambda_{n-1} & \lambda_0 & \ldots & \lambda_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten: $\alpha_{ij} = \lambda_{j-i}$, wobei man den Index $j - i$ modulo n zu verstehen hat. Sei R die Menge aller Zirkulanten $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Beweisen Sie, daß die Teilmenge $R \subset \mathrm{Mat}_n(K)$ ein kommutativer Unterring ist. Das bedeutet im Einzelnen:

(i) Die Nullmatrix $A = 0$ und die Einheitsmatrix $A = E$ sind Zirkulanten.

(ii) Sind A, B zwei Zirkulanten, so sind auch Summe $A + B$ und Produkt AB Zirkulanten.

(iii) Sind A, B zwei Zirkulanten, so gilt $AB = BA$.

Aufgabe 3. Sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Man bezeichnet f als *Fredholmsch*, falls die beiden K-Vektorräume

$$V' = \mathrm{kern}(f) \quad \text{und} \quad V'' = V/\mathrm{im}(f)$$

endlich-dimensional sind. Man definiert den *Index* $\operatorname{ind}(f) \in \mathbb{Z}$ eines Fredholmschen Endomorphismus als die Differenz

$$\operatorname{ind}(f) = \dim_K(V') - \dim_K(V'').$$

(i) Angenommen, V ist endlich-dimensional. Zeigen Sie, daß jeder Endomorphismus $f : V \to V$ Fredholmsch vom Index $\operatorname{ind}(f) = 0$ ist.

(ii) Sei $V = k[t]$ der Polynomring und

$$f : k[t] \longrightarrow k[t], \quad h \longmapsto gh$$

die Multiplikation mit einem vorgegebenen Polynom $g \in K[t]$, $g \neq 0$. Beweisen Sie, daß f Fredholmsch vom Index $\operatorname{ind}(f) = -\deg(g)$ ist.

Aufgabe 4. Sei $n \geq 0$ eine feste natürliche Zahl, und

$$A_m = (\alpha_{ij}^{(m)}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$$

eine durch $m \geq 0$ indizierte Folge von reellen Matrizen. Wir sagen, daß die Folge der Matrizen A_m *konvergiert*, falls für alle Indices $1 \leq i, j \leq n$ die Folge der Einträge $a_{ij}^{(m)}$ konvergiert. Schreibweise:

$$B = \lim_{m \to \infty} A_m,$$

wobei $B = (\beta_{ij})$ die reelle Matrix mit Einträgen $\beta_{ij} = \lim_{m \to \infty} \alpha_{ij}^{(m)}$ ist.

(i) Sei nun $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine Matrix, und

$$A_m = E + X + \frac{X^2}{2} + \ldots + \frac{X^m}{m!} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}).$$

Beweisen Sie mit Methoden der Analysisvorlesung, daß die Matrizenfolge A_m konvergiert. Man bezeichnet den Grenzwert als die *Exponentialmatrix*

$$\exp(X) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}.$$

(ii) Sei $\varphi, s, t \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Berechnen Sie die reellen 2×2-Matrizen

$$\exp(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}) \quad \text{und} \quad \exp(\begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix}).$$

Sind diese Matrizen invertierbar?

Abgabe: Bis Montag, den 10.1. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 04/05

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 1. Welche der acht oberen Dreiecksmatrizen $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_2)$ sind diagonalisierbar?

Aufgabe 2. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ trigonalisierbare Matrizen. Beweisen oder wiederlegen Sie:

(i) Sie Summe $A + B$ ist trigonalisierbar.

(ii) Das Produkt AB ist trigonalisierbar.

(iii) Die transponierte Matrix A^t ist trigonalisierbar.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper. Für welche Skalare $x \in K$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ 2x-6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(K)$$

trigonalisierbar bzw. diagonalisierbar?

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und $e_1, \ldots, e_n \in V$ eine Basis. Sei $f : V \to V$ der Endomorphismus mit $f(e_i) = e_{i+1}$, wobei der Index modulo n zu verstehen ist.

(i) Berechenen Sie das charakteristische Polynom $\chi_f(t) \in K[t]$.

(ii) Sei $K = \mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$, geben sie jeweils einen Eigenvektor $v \in V$ zum Eigenwert λ an, und zeigen Sie, daß $f : V \to V$ diagonalisierbar ist.

(iii) Sei $K = \mathbb{R}$ und $n \geq 3$. Verifizieren Sie, daß f nicht trigonalisierbar ist.

(iv) Sei $K = \mathbb{F}_3$ und $n = 3$. Beweisen Sie, daß $f : V \to V$ trigonalisierbar aber nicht diagonalisierbar ist.

Abgabe: Bis Montag, den 17.1. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

Zur Teilnahme an der Klausur am 29.1. und der Nachklausur am 16.4. ist aus juristischen Gründen eine Anmeldung erforderlich. Diese erfolgt durch persönlichen Eintrag in Anmeldungslisten in der Woche vom 10.-14.1. in der Vorlesung, den Übungen, oder im Tutorium.

Studenten, bei denen die Zulassung zur Klausur auf der Kippe steht (Kriterium: 40 % = 88 Übungspunkte auf 11 Blätter im Hauptfach, 32 % = 70 Übungspunkte für das Nebenfach) melden sich unbedingt am Mittwoch, den 12.1. um 13-14 Uhr im Seminarraum 25.22.03.73!

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 04/05

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei V ein dreidimensionaler K-Vektorraum, und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit charakteristischem Polynom $\chi_f(t) = t^3 + 4t^2 + 5t + 2$. Was ist das charakteristische Polynom von $f^2 = f \circ f$?

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Beweisen Sie: A ist genau dann nilpotent, wenn A trigonalisierbar und $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$.

Aufgabe 3. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt *Spiegelung*, falls $f^2 = \mathrm{id}_V$ und der Endomorphismus $\mathrm{id}_V - f$ vom Rang eins ist. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Jede Spiegelung $f : V \to V$ ist diagonalisierbar und hat charakteristisches Polynom $\chi_f(t) = (t+1)(t-1)^{n-1}$, wobei $n = \dim_K(V)$.

(ii) Zu jeder Spiegelung $f : V \to V$ gibt es einen Vektor $a \in V$ und eine Linearform $\varphi : V \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) = 2$ so, daß $f(x) = x - \varphi(x)a$.

Aufgabe 4. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ zwei Matrizen. Beweisen Sie, daß die Produkte AB und BA das gleiche charakteristische Polynom haben. Tip: Betrachten Sie zunächst die beiden Spezialfälle

$$A \in \mathrm{GL}_n(K), \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Bis Montag, den 24.1. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.