Aufgabe 1. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Zeigen Sie $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1+2i & -1+i \\ 0 & 1 & 2i \\ 2i & 5-i & 8+5i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$$

invertierbar ist, und berechnen Sie die inverse Matrix.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, und $V \subset \mathrm{Mat}_2(K)$ der Untervektorraum aller Matrizen mit Spur $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Wir definieren eine lineare Abbildung

$$f : V \longrightarrow V, \quad A \longrightarrow A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A.$$

Wählen Sie eine Basis $A_1, A_2, A_3 \in V$, bestimmen Sie die Matrix $B \in \mathrm{Mat}_3(K)$ von f bezüglich dieser Basis, und entscheiden Sie, ob B nilpotent ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, $f : V \to W$ eine Abbildung von K-Vektorräumen, und

$$\Gamma = \{(x, y) \in V \oplus W \mid y = f(x)\}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : V \to W$ genau dann linear ist, wenn die Teilmenge $\Gamma \subset V \oplus W$ ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 5. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und $f : V \to V$ ein Endomorphismus, der nilpotent und surjektiv ist. Beweisen Sie, dass dann $V = 0$ gilt.

Aufgabe 6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & z \\ \bar{z} & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 7. Für welche Skalare $\alpha \in \mathbb{F}_5$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_5)$$

trigonalisierbar? Für welche α ist sie nilpotent?