Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 02/03

Nachklausur zur Algebra I

11.4.2003

Aufgabe 1. Bestimme die invarianten Faktoren $d_1|d_2|\ldots|d_r$ der endlichen abelschen Gruppe $G = (\mathbb{Z}/57\mathbb{Z})^\times \oplus \mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ und entscheide, ob diese Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/252\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 2. Für welche $a \in \mathbb{F}_3$ is der Ring $R = \mathbb{F}_3[T]/(T^3+aT^2-T+1)$ ein Körper? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 3. Zeige, daß die symmetrische Gruppe S_7 eine zyklische Untergruppe $H \subset S_7$ der Ordnung 12 enthält.

Aufgabe 4. Berechne das Kreisteilungspolynom $\Phi_{10}(T) \in \mathbb{Z}[T]$.

Aufgabe 5. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel, und $a = \sum_i \zeta^i$, wobei die Summe über alle $1 \leq i \leq n$ mit $\operatorname{ggT}(i, n) = 1$ verläuft. Beweise, daß $a \in \mathbb{Q}$ gilt.

Aufgabe 6. Sei $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ eine primitive 12-te Einheitswurzel. Zeige, daß $\mathbb{Q}(\zeta^2 + \zeta) = \mathbb{Q}(\zeta)$ gilt.

Aufgabe 7. Sei $K \subset L$ eine galoische Körpererweiterung vom Grad $[L : K] = 200$. Zeige, daß es mindestens 7 verschiedene Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ gibt.

Aufgabe 8. Sei $K = \mathbb{F}_2(T)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{F}_2[T]$. Geben sie eine endliche Körpererweiterung $K \subset L$ an, die nicht separabel ist, und begründen Sie.

Pro Aufgabe können 4 Punkte erreicht werden. Die Klausur gilt als bestanden falls 50% = 16 Punkte erreicht werden.