Vorlesung Zahlentheorie II (Analytische ZT)

SoSe '23, hhu
K. Halupczok

a9: Primzahlen in Progressionen

Stichworte: Primzahlsatz in Progressionen mit (vom Modul q abhängigem) Restglied, primitive Charaktere, Führungszahl, Eulerprodukt von $L(s,\chi)$

9.1. Einleitung:

Seien $a,q \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Wir behandeln die Zählfunktionen der $p \equiv a\,(q)$.
Der Beweis des PZSes mit Restglied lässt sich auf PZen in Progressionen übertragen: Wegen $\psi(x;q,a) = \sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv a\,(q)}} \Lambda(n) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \bar\chi(a) \sum_{n\le x} \Lambda(n)\chi(n)$, vgl. 8.7,
kommt es auf die Koeff. von
$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{n\ge 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\chi(n)$ an. Wieder wird die Perronsche Formel 3.12 angewendet,
sowie $L(1+it,\chi)\neq 0$ für $t>0$, $\chi^2 \neq \chi_0$.

Man erhält so ohne Probleme den PZS in Progressionen in der Form:

$$\psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)}\left(1+o_q(1)\right), \quad \text{glm. für alle } a \text{ mit } (a,q)=1, \text{ wo } q \text{ fest.}$$

Eine partielle Σ liefert daraus wiederum die Version

$$\pi(x;q,a) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)}\left(1+o_q(1)\right), \quad \text{glm. für alle } a \text{ mit } (a,q)=1, \text{ wo } q \text{ fest.}$$

Demnach sind die PZen auf den Restklassen $a \bmod q$, $(a,q)=1$, gleichverteilt: Pro Restklasse beträgt ihr (asymptotischer) Anteil $\frac{1}{\varphi(q)}$.

⌜Bsp.: Für $q=10$: $25\% = \frac{1}{4} = \frac{1}{\varphi(10)}$ aller PZen haben die Endziffer 1 (bzw. 3, 7 oder 9)⌟

Strebt man eine Version mit expliziter Fehlertermabschätzung an, so kann auf diesem Wege analog auch gezeigt werden, dass gilt:

9.2. PZS in arithmetischen Progressionen: Für $q\in\mathbb{N}$ und $x\to\infty$ gilt:

$$\psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_q\left(\frac{x}{\exp(c_0\sqrt{\log x})}\right), \quad \text{alle } a \text{ mit } (a,q)=1,$$

$$\pi(x;q,a) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} + \quad '' \qquad '' \qquad , \quad c_0 = c_0(q).$$

(d.h. der PZS mit Restterm, Satz 5.4, überträgt sich).

Bem.:
- Dies geht auch mit dem Vinogradov-Korobov-Fehlerterm, Satz 7.18
- Zeigen später mit dem Satz von Siegel-Walfisz 11.6 ein stärkeres Ergebnis.

In manchen Anwendungen des PZSes in Progressionen (z.B. Goldbachproblem) ist hingegen die Abhängigkeit des Fehlerterms von q wesentlich, oft kommt es auf die Gleichmäßigkeit des Satzes in einem weiten q-Bereich an. Ohne Ann. unbewiesener Vermutungen (unkonditionell) fällt der q-Bereich aber sehr klein aus, was wir hier behandeln möchten.

Wir benötigen zuerst noch einen Begriff im Zusammenhang mit Charakteren.

9.3. Satz und Def.: (a) Sei $\chi \neq \chi_0$ ein Charakter mod q. Dann gibt es eind. ein q^* mit: $q^* | q$ und q^* ist die kürzeste Periode von χ, eingeschränkt auf $\{n \in \mathbb{N};\ (n,q)=1\}$.

(b) Falls in (a) $q^* = q$ gilt, heißt χ primitiver Charakter.

(c) Zu jedem Charakter $\chi \neq \chi_0$ mod q gibt es eind. ein $q^* | q$ und einen primitiven Charakter χ^* mod q^*, so dass $\chi(n) = \chi^*(n)$ für $(n,q)=1$.
(D.h. $\chi = \chi^* \cdot \chi_0$.)

Man sagt, χ wird erzeugt vom primitiven Charakter χ^* mod q^*.
Die Zahl q^* heißt Führungszahl bzw. Erklärungsmodul zum Charakter χ mod q.

9.4. Bem.: χ_0 mod q wird nicht zu den primitiven Charakteren gezählt [obwohl χ_0 mod 1 alle χ_0 mod q erzeugt].

Bew.: Zu (a): Sei $q^* \leq q$ die kleinste nat. Zahl, für die χ auf $\{n;\ (n,q)=1\}$ q^*-periodisch ist (d.h. $\chi(n+r q^*) = \begin{cases} 0, & (n+r q^*, q) > 1, \\ \chi(n), & \text{sonst}; \text{"}=1 \end{cases}$).

Zeigen $q^* | q$: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $(q, q^*) = a q + b q^*$ [Euklidischer Algorithmus].
Falls $(a + (q, q^*), q) = 1$, folgt $\chi(n + (q, q^*)) = \chi(n + aq + bq^*) = \chi(n + bq^*)$
$= \chi(n)$, so dass auch (q, q^*) Periode.

Also: $q^* \leq (q, q^*) \leq q^* \Rightarrow (q, q^*) = q^* \Rightarrow q^* | q$.

Zu (c): • Sei $q^* | q$ nach (a) die kleinste Periode von χ auf $\{n;\ (n,q)=1\}$.

• Es muss ein primitiver Charakter χ^* mod q^* gefunden werden, der χ erzeugt. Dazu muss $\chi^*(n) = \begin{cases} \chi(n), & (n,q)=1 \\ 0, & (n,q^*)>1 \end{cases}$ gesetzt werden. Es fehlen die Werte von $\chi^*(n)$ für $(n,q)>1$ und $(n,q^*)=1$.

Falls es $t \in \mathbb{Z}$ gibt mit $(n + tq^*, q) = 1$, setze $\chi^*(n) = \chi(n + tq^*)$.
Die Wahl von t darin ist unerheblich, da χ auf $\{n;\ (n,q)=1\}$ q^*-periodisch.

- Man kann $t = \prod_{\substack{p \mid q \\ p \nmid q^* m}} p$ nehmen, es genügt, z.z.: $m \nmid m + tq^*$ für alle $m \mid q$.
- 1. Fall: $m \mid q^*$. Aus $m \mid m + tq^*$ folgt $m \mid m$, im ↯ zu $(m, q^*) = 1$.
- 2. Fall: $m \nmid q^*$, $m \mid q$, $m \mid m$. Aus $m \mid m + tq^*$ folgt $m \mid tq^*$, $m \mid t$, im ↯ zur Def. von t.
- 3. Fall: $m \nmid q^*$, $m \mid q$, $m \nmid m$. Dann ist $m \mid t$, und aus $m \mid m + tq^*$ folgt $m \mid m$, ↯.
- Nun ist χ^* nach Def. q^*-periodisch. Weiter ist χ^* vollst. multiplikativ und somit Charakter mod q^*. Da q^* minimale Periode, ist (außer $q^* = 1$, $\chi^* = \mathbb{1}$) χ^* primitiver Charakter mod q^*. (Aus $\chi^* = \mathbb{1}$ folgt $\chi = \chi^*$ mod q, was ausgeschlossen war.) □

9.5 **Bsp.:** χ mod 10 wird erzeugt von χ^* mod 5:

$m\ (10)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\chi^*(m)$	1	i	$-i$	-1	0	1	i	$-i$	-1
$\chi(m)$	1	0	$-i$	0	0	0	i	0	-1

9.6 **Satz:** Sei $\chi \neq \chi_0$ mod q von χ^* erzeugt.

Dann gilt für $\sigma > 1$: $$L(s,\chi) = L(s,\chi^*) \cdot \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^s}\right).$$

Bew.: Für $\sigma > 1$ liefert der Euler-Π-Satz Anz 8.15

$$L(s,\chi) = \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^s}\right)^{-1} = \underbrace{\prod_p \left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^s}\right)^{-1}}_{= L(s,\chi^*)} \cdot \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^s}\right).$$ □

9.7 **Bem.:** Für den Hauptcharakter χ_0 mod q gilt für $\sigma > 1$:

$$L(s,\chi_0) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{\substack{p \\ p \nmid q}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \zeta(s) \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$