Vorlesung Zahlentheorie II (Analytische ZT)

SoSe '23, hhu
K. Halupczok

a8: Dirichletsche L-Reihen

Stichworte: Dirichlet-Charaktere, Dirichlet-L-Reihen, Eulerprodukt-Darstellung, merom. Fortsetzung, PZen in APen, Satz von Dirichlet, Funktionalgleichung von $L(s,\chi)$

8.1. Einleitung:
Das Studium der Primzahlen in arithmetischen Progressionen (APs) bzw. in Restklassen (d.h. $p \equiv a \bmod q$) ist eng mit der Theorie der Dirichletschen L-Reihen verbunden. Vorbild ist der Zusammenhang zwischen $\psi(x)$ und $\zeta(s)$, der auf $\psi(x;q,a)$ und den zugehörigen Dirichletreihen $L(s,\chi)$ verallgemeinert werden soll.
Die Koeffizientenfolgen heißen Dirichletcharaktere und sollen als erstes behandelt werden.

8.2. Def.: Sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Charakter der Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z},\cdot)^*$,
d.h. $\tilde{\chi}: (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}$ sei Gruppenhomomorphismus $\lceil \tilde{\chi}(mn) = \tilde{\chi}(m)\tilde{\chi}(n) \rfloor$.
Die durch Forts. von $\tilde{\chi}$ auf $\mathbb{N}$ entstehende vollst. mult. zth. Fkt. $\chi: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, mit $\chi(n) = \tilde{\chi}(n \bmod q)$ falls $ggT(n,q)=1$ und $\chi(n)=0$ sonst, heißt Dirichletcharakter mod q. Ist $\tilde{\chi}$ der triviale Charakter von $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z},\cdot)^*$, so heißt χ der Hauptcharakter mod q und wird mit χ_0 bezeichnet.
$\lceil \rightsquigarrow \chi_0(n) = 1$ für $(n,q)=1 \rfloor$

8.3. Satz: Es gibt $\varphi(q)$ viele Dirichletcharaktere χ mod q, wobei φ die Eulersche φ-Fkt. ist (d.h. $\varphi(q) := \#\{0 < a \le q;\ ggT(a,q)=1\}$).

Bem.: $q=1 \Rightarrow \chi = \mathbb{1}$. Haben ja $\varphi(1)=1$.
Behandeln im folgenden nur noch D-Charaktere, schreiben dafür Charakter.

Bew.: • Für $m \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ und ein χ mod q ist $\chi(m)$ eine $\varphi(q)$-te EW. $\rightsquigarrow$ es ex. nur endlich viele Charaktere mod q.

• $\sum_{\chi(q)} \sum_{m(q)} \chi(m) = \sum_{m(q)} \chi_0(m) + \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{m(q)} \chi(m) \underset{\substack{\text{ONR}\\ 8.4.a)}}{=} \sum_{m(q)} \chi_0(m) = \varphi(q)$.

• $\sum_{\chi(q)} \sum_{m(q)} \chi(m) = \sum_{\chi(q)} \chi(1) + \sum_{\chi(q)} \sum_{m \not\equiv 1(q)} \chi(m) \underset{\substack{\text{ONR}\\ 8.4.b)}}{=} \sum_{\chi(q)} 1$. Also: $\sum_{\chi(q)} 1 = \varphi(q)$. $\square$

8.4. Satz (Orthogonalitätsrelationen):

(a) ONR 1. Art: $\sum_{n \bmod q} \chi(n) = \varphi(q)$, falls $\chi = \chi_0$ und $= 0$ sonst,

und $\sum_{n \bmod q} \chi_1(n)\overline{\chi_2(n)} = \varphi(q)$ falls $\chi_1 = \chi_2$ und $=0$ sonst.

(b) ONR 2. Art: $\sum_{\chi \bmod q} \chi(n) = \varphi(q)$ falls $n \equiv 1 \bmod q$ und $=0$ sonst,

und $\sum_{\chi \bmod q} \chi(n_1)\overline{\chi(n_2)} = \varphi(q)$ falls $n_1 \equiv n_2 \bmod q$ und $=0$ sonst.

Bew.:

- Der 2. Teil der Aussage folgt mit $\chi = \chi_1\overline{\chi_2}$ bzw. $n_1 n_2^{-1}$ aus dem 1. Teil.
- (a): $\chi = \chi_0$ klar, $\chi \neq \chi_0$: Betr. m mit $\chi(m) \neq 1$. Dann: $\sum_{n(q)} \chi(n) = \sum_{n(q)} \chi(mn) = \chi(m)\sum_{n(q)} \chi(n) \Rightarrow \sum_{n(q)} \chi(n) = 0$.
- (b): $n \equiv 1 (q)$ klar, $n \not\equiv 1 (q)$: Betr. χ_1 mit $\chi_1(n) \neq 1$. Dann: $\sum_{\chi(q)} \chi(n) = \sum_{\chi(q)} (\chi\chi_1)(n) = \chi_1(n)\sum_{\chi(q)} \chi(n) \Rightarrow \sum_{\chi(q)} \chi(n) = 0$.

$\square$

8.5. Def.: Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Charakter mod q. Unter der Dirichletschen L-Reihe $L(s,\chi)$ zu χ versteht man $L(s,\chi) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) n^{-s}$, $\sigma > 1$.

8.6. Satz: Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Charakter mod q. Dann ist $L(s,\chi)$ für $\sigma > 1$ normal konvergent (glm. kgt. auf Kompakta), und für $\chi \neq \chi_0$ sogar für $\sigma > 0$.
Somit stellt $L(s,\chi)$ für $\sigma > 1$ (bzw. für $\sigma > 0$ falls $\chi \neq \chi_0$) eine hol. Fkt. dar.
Für $\sigma > 1$ gilt die Eulerproduktdarstellung $L(s,\chi_0) = \zeta(s) \cdot \prod_{p \mid q} (1 - p^{-s})$, mit der $L(s,\chi_0)$ zu einer in $\sigma > 0$ meromorphen Fkt. fortgesetzt wird.

Bew.: Part. Σ zeigt $\sum_{n \geq 1} \chi(n) n^{-s} = \lim_{N \to \infty} \left(N^{-s} \cdot \sum_{n \leq N} \chi(n) \right) + s \int_1^\infty \underbrace{\left(\sum_{n \leq u} \chi(n)\right)}_{\text{beschränkt für } \chi \neq \chi_0} u^{-s-1} du$.

normale kgz. für $\sigma > 0$, bei $\chi = \chi_0$ für $\sigma > 1$.

Haben weiter $\chi_0(p) = \begin{cases} 0, & p \mid q \\ 1, & p \nmid q \end{cases}$,
also gilt für $\sigma > 1$:

$$L(s,\chi_0) \underset{\text{Euler-}\Pi\text{-Satz (Anf 8)}}{=} \prod_{p \nmid q} (1 - p^{-s})^{-1} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \prod_{p \mid q} (1 - p^{-s}) = \zeta(s) \prod_{p \mid q} (1 - p^{-s}). \quad \square$$

Der Zusammenhang zwischen $\psi(x;q,a)$ und $L(s,\chi)$ wird mit folgendem allg. Prinzip klar, das aus den ONR folgt.

8.7. Satz: Für eine zth. Fkt. f und $(a,q)=1$ ist für $x \geq 1$:

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a(q)}} f(n) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \overline{\chi}(a) \sum_{n \leq x} \chi(n) f(n),$$ wobei $\sum_{n \leq x}$ auch durch $\sum_{n=1}^{\infty}$ ersetzt werden kann, falls $\sum_n |f(n)|$ kgt.

Bew.: r.S. $= \sum_{n \leq x} f(n) \cdot \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \overline{\chi}(a)\chi(n) = \sum_{n \leq x} f(n) \cdot \underbrace{\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \chi(a^{-1}n)}_{\text{ONR: } =1 \text{ falls } a^{-1}n \equiv 1(q),\ =0 \text{ sonst}}$

$$= \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a(q)}} f(n).$$ □

Sei $(a,q)=1$. Die zu Pzen $p \equiv a(q)$ gehörige 2. Tsch.-Fkt. $\psi(x;q,a)$ und dazu gehörige erzeugende Dirichletreihe kann so mit den zugehörigen erzeugenden L-Reihen der Charaktere mod χ gewonnen werden:

8.8. Kor.: Es sei $q \in \mathbb{N}$, $(a,q)=1$, $\sigma > 1$. Dann ist

$$\sum_{n \equiv a(q)} \Lambda(n) n^{-\sigma} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \overline{\chi}(a) \underbrace{\sum_{n \geq 1} \chi(n) \Lambda(n) n^{-\sigma}}_{= -\frac{L'}{L}(\sigma,\chi) \leftarrow \text{wie bei S}} = \frac{-1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \overline{\chi}(a) \cdot \frac{L'}{L}(\sigma,\chi).$$ □

Ziel ist es nun, den Satz von Dirichlet zu beweisen. Mit 8.10.–8.15.

8.9. Satz (von Dirichlet): Sei $q \in \mathbb{N}$ und $ggT(a,q)=1$. Dann enthält die AP a mod q unendl. viele Pzen, d.h. $\#\{p \equiv a(q);\ p \in \mathbb{P}\} = \infty$.

(Insbesondere existiert stets mindestens eine Pz $p \equiv a(q)$.)

8.10. Satz: Sei $q \in \mathbb{N}$, χ ein Charakter mod q und $m_\chi \in \mathbb{N}_0$ die Vielf. der Nst. 1 von $L(\sigma,\chi)$, sei $(a,q)=1$.

Dann: $$\lim_{\sigma \to 1+} (\sigma-1) \sum_{n \equiv a(q)} \Lambda(n) n^{-\sigma} = \frac{1}{\varphi(q)} \Big(1 - \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(a) \cdot m_\chi\Big).$$

Bew.: Verwenden, dass $L(s,\chi)$ für $\chi \neq \chi_0$ und $L(s,\chi_0) - \frac{1}{\sigma-1}$ Taylorentwicklungen in $\sigma_0 = 1$ (folgt mit Holomorphie der Fktn. aus Satz 8.6.) haben.

Betr. Kor. 8.8. für $\sigma > 1$, unter Verwendung von $L(s,\chi) \neq 0 \Rightarrow \frac{L'}{L}(\sigma,\chi) = O(1)$ für $\sigma \to 1+$.

Es habe $L(\sigma,\chi)$ eine Nst. der Vielf. m_χ in $\sigma = 1$. Haben dann die Taylorentwicklungen

$L(\sigma,\chi) = c_{m_\chi} (\sigma-1)^{m_\chi} + c_{m_\chi+1} (\sigma-1)^{m_\chi+1} + \ldots$ und

$L'(\sigma,\chi) = m_\chi c_{m_\chi} (\sigma-1)^{m_\chi-1} + \ldots$ um $\sigma_0 = 1$ mit $c_{m_\chi} \neq 0$.

Also: $\lim_{\sigma \to 1+} -(\sigma-1) \cdot \frac{L'}{L}(\sigma,\chi) = -m_\chi$. Weiter $\lim_{\sigma \to 1+} -(\sigma-1) \cdot \frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0) = 1$.

Es folgt die Beh. mit Kor. 8.8. □

(auch: quadratisch, weil dann $\chi^2 = \chi_0$ gilt)

8.11. **Def.:** Der Char. χ mod q heißt **reell**, falls $\chi: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, andernfalls **komplex**.

8.12. **Satz:** (a) Für höchstens ein χ mod q ist $L(1,\chi) = 0$.

(b) Für komplexes χ ist $L(1,\chi) \neq 0$.

Bew.: (a): Folgt aus 8.10, da $\lim_{\sigma \to 1+} (\sigma - 1) \sum_{m \equiv 1 (q)} \Lambda(m) m^{-\sigma} \geq 0$. (Beachte: $a = 1 \sim \bar{\chi}(a) = 1$)

(b): Aus $L(1,\chi) = 0$ folgt $L(1,\bar{\chi}) = 0$. Für komplexe χ ist $\chi \neq \bar{\chi}$, und (b) folgt aus (a). □

8.13. **Satz:** Sei $\chi \neq \chi_0$ reell. Dann ist $\left| L(1,\chi) - \sum_{n \leq x} \chi(n) n^{-1} \right| = O_q(x^{-1})$

und $\left| L(\tfrac{1}{2},\chi) - \sum_{n \leq x} \chi(n) n^{-1/2} \right| = O_q(x^{-1/2})$.

Bew.: Für $\sigma > 0$ zeigt part. Σ: $\left| L(\sigma,\chi) - \sum_{n \leq x} \chi(n) n^{-\sigma} \right| = \sigma \cdot \int_x^\infty \left(\sum_{x < n \leq t} \chi(n) \right) t^{-\sigma-1} dt = O_q(x^{-\sigma})$. □

8.14. **Satz:** Für $\chi \neq \chi_0$ reell ist $L(1,\chi) \neq 0$.

Bew.: Sei $F(n) := \sum_{d|n} \chi(d) = \chi * \mathbb{1}(n)$, ist mult.

Für die Werte von F auf Primpotenzen gilt $F(p^\nu) = \sum_{0 \leq \lambda \leq \nu} \chi(p^\lambda) = \begin{cases} 1, & p \nmid q \\ \nu+1, & \chi(p) = 1 \\ 0, & \chi(p) = -1,\ 2 \nmid \nu \\ 1, & \chi(p) = -1,\ 2 \mid \nu \end{cases}$

Haben $F(p^\nu) \geq 0$ und $F(p^{2\nu}) \geq 1$,

also ist $F(n) \geq 0$ und $F(n^2) \geq 1$. Setze $G(x) = \sum_{n \leq x} F(n) n^{-1/2}$.

Es folgt $G(x) \geq \sum_{n \leq \sqrt{x}} F(n^2) n^{-1} \geq \sum_{n \leq \sqrt{x}} n^{-1} > \frac{1}{2} \log(x)$.

Andererseits ist

$$G(x) = \sum_{n \leq x} n^{-1/2} \sum_{d|n} \chi(d) = \sum_{d \leq \sqrt{x}} \chi(d) d^{-1/2} \sum_{t \leq x/d} t^{-1/2} + \sum_{t \leq \sqrt{x}} t^{-1/2} \sum_{\sqrt{x} < d \leq x/t} \chi(d) d^{-1/2}.$$

Nach der Eulerschen Summenformel 1.6. ist für $\sigma > 0$

$$\sum_{n \leq y} n^{-\sigma} = \int_1^y t^{-\sigma} dt - \sigma \underbrace{\int_1^y P_0(u) u^{-\sigma-1} du}_{= \int_1^\infty \ldots + O_\sigma(y^{-\sigma})} - y^{-\sigma} P_0(y) + P_0(1).$$

Mit $C_\sigma > 0$ passend folgt $\sum_{n \leq y} n^{-\sigma} = (1-\sigma)^{-1} y^{-\sigma+1} + C_\sigma + O_\sigma(y^{-\sigma})$.

Also ist $G(x) = \sum_{d \leq \sqrt{x}} \chi(d) d^{-1/2} \cdot \left(2 (x/d)^{1/2} + C_{1/2} + O((d/x)^{1/2}) \right) + \sum_{t \leq \sqrt{x}} \left(t^{-1/2} \cdot O(x^{-1/4}) \right)$

$(\sigma = \frac{1}{2})$ $\qquad (t/x)^{1/2} \ll x^{-1/4}$

$$= 2x^{1/2} \underbrace{\sum_{d \leq \sqrt{x}} \chi(d) d^{-1}}_{= L(1,\chi) + O(x^{-1/2})} + C_{1/2} \underbrace{\sum_{d \leq \sqrt{x}} \chi(d) d^{-1/2}}_{= L(\frac{1}{2},\chi) + O(x^{-1/4})} + O(1) \quad \leftarrow \text{nach } 5.12.$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} L(1,\chi) + O(1).$$

Aus $L(1,\chi) = 0$ würde $G(x) = O(1)$ folgen, im $\lightning$ zu $G(x) > \frac{1}{2} \log(x)$. □

8.15. **Kor.:** Sei $q \in \mathbb{N}$, $ggT(a,q)=1$. Dann: $\lim\limits_{\sigma \to 1^+} (\sigma-1) \cdot \sum\limits_{n \equiv a(q)} \Lambda(n) n^{-\sigma} = \frac{1}{\varphi(q)}$.

Bew.: Die Sätze 8.12 und 8.14 implizieren $m_\chi = 0$ für alle $\chi \neq \chi_0$ in Satz 8.10. (bel. a) $\square$

8.16. **Bew. des Satzes 8.9 von Dirichlet:**

Haben

$$\sum_{n \equiv a(q)} \Lambda(n) n^{-\sigma} = \sum_{p \equiv a(q)} (\log p) \cdot p^{-\sigma} + O(1) \text{ für } \sigma \to 1+,$$

denn $$0 \leq \sum_{p \equiv a(q)} \log p \sum_{k \geq 2} p^{-k\sigma} = \sum_p (\log p)\, p^{-2\sigma} \cdot \frac{1}{1-p^{-\sigma}} \overset{\sigma > 1}{\leq} \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} = O(1).$$

Aus Kor. 8.15. folgt somit, dass auch $\lim\limits_{\sigma \to 1+} \overbrace{(\sigma-1)}^{\to 0} \cdot \sum\limits_{p \equiv a(q)} (\log p) \cdot p^{-\sigma} = \frac{1}{\varphi(q)}$.
Also divergiert die Reihe, und $\#\{p \in \mathbb{P};\, p \equiv a(q)\} = \infty$. $\square$

8.17. **Bem.:** Auch für L-Reihen kann eine Funktionalglg. wie für ζ hergeleitet werden. Sie lautet ($q > 1$, χ primitiv, d.h. ohne Periode $< q$ ($\Rightarrow \chi \neq \chi_0$))

$$\Lambda(s,\chi) = \varepsilon(\chi) \cdot \Lambda(1-s, \bar{\chi}),$$

mit der vollständigen L-Reihe

$$\Lambda(s,\chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{s+\kappa}{2}\right) L(s,\chi),$$

$$\kappa = \tfrac{1}{2}(1-\chi(-1)), \quad \varepsilon(\chi) = i^{-\kappa} \cdot \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}},$$

und der Gaußsumme $\tau(\chi) = \sum\limits_{m(q)} \chi(m) e^{2\pi i m/q}$.

$L(s,\chi)$ wird damit zu einer ganzen Fkt. fortgesetzt (d.h. holomorph auf $\mathbb{C}$).