Vorlesung Zahlentheorie II (Analytische ZT)

SoSe '23, hhu
K. Halupczok

a7: Weylsche Exponentialsummen

Stichworte: Weylsche Exponentialsumme, Weylsche Ungleichung, Vinogradov-Integral, Vinogradovs Mittelwertsatz, k-ter Ableitungstest, nullstellenfreies Gebiet / PZS (2. Version)

7.1. Einleitung: Wir skizzieren die Bausteine einer modernen Herangehensweise zum Beweis des Vinogradov-Korobov-nullstellenfreien Gebiets samt zugehörigem PZS (2. Version).

7.2. Def.: Eine allgemeine Weylsche Exponentialsumme bzw. trigonometrische Summe ist eine Summe der Form $\sum_{a<n\le x} e(f(n))$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $e(t):=e^{2\pi i t}$.
Ist f eine Polynomfunktion, spricht man von einer Weylschen Exponentialsumme.

7.3 Bem.: • Eine der Ideen von Weyl besteht darin, f mit Taylors Satz durch Polynome zu entwickeln, und so das Studium der ursprünglichen Summe auf das der Summen mit Polynomen zurückzuführen. Das geht sehr gut mit $\sum_n n^{it} = \sum_n e(\frac{t}{2\pi}\log n)$ zum Studium der ζ-Fkt. (und des PZS) und führt uns auf Verbesserungen im Fehlerterm des PZS in einer 2. Version.

• Die Dirichletreihe $\sum_{n\ge 1} n^{-s}$ für $\zeta(s)$, $\sigma>1$, konvergiert zwar nicht mehr für $\sigma\le 1$. Dennoch können die Partialsummen zur Approximation herangezogen werden, und es gibt folgende Möglichkeiten dafür:

(1.) Hardy-Littlewood-Approximationsformel: $\zeta(s) = \sum_{n\le x} n^{-s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-\sigma})$, $|t|\le 4x$, $\sigma>0$.
(vgl. Satz 1.16)

(2.) Die approximative Funktionalglg.: $\zeta(s) = \sum_{n\le x} n^{-s} + \Delta(s)\sum_{n\le y} n^{s-1} + O((x^{-\sigma}+t^{\frac12-\sigma}y^{\sigma-1})\log(t))$,
$\Delta(s)=\frac{(2\pi)^s}{2\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)}$, wo $2\pi xy = t$, $x\ge 1$, $y\ge 1$, $0<\sigma<1$.

Obere Schranken für $\sum_{n\le x} n^{\sigma+it} = \sum_{n\le x} n^{\sigma}\cdot e(\frac{t}{2\pi}\log(n))$ mit Weylsummen führen so auf ob. Schranken für $\zeta(s)$, mit Satz 9.1. auf nullstellenfreie Gebiete und dann auf den PZS.

7.4. Bem.: Offenbar hängt $e(f(n))$ nur vom gebrochenen Teil $f(n)-\lfloor f(n)\rfloor\in[0,1)$ ab.
Weylsche Exponentialsummen hängen eng mit der Theorie der Gleichverteilung von Folgen zusammen.

7.5. Sei $f \in \mathcal{C}^{a+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Die Approximation von f mit einem Taylorpolynom führt auf

$$\sum_{0<m\le x-a} e(f(a+m)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \sum_{m=1}^{x-a} m^\nu e\left(f'(a)m + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} m^k\right)$$

mit $c_\nu \in \mathbb{R}$. Ist $|c_\nu|$ hinr. klein, kann die Absch. dieser Exponentialsummen auf die von $\sum_{m\le N} e(P(m))$, $P(m) = P_k(m) = f'(a)m + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} m^k$ zurückgeführt werden. Wir beschränken uns daher auf solche Weylsummen mit Polynomen.

Hierzu konnte Weyl die folgende Unglg. zeigen.

7.6. Satz (Weylsche Ungleichung): Es sei $P_k(x) = \alpha_k x^k + \dots + \alpha_0$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $k \ge 1$, sowie $S = \sum_{n\le N} e(P_k(n))$. Der Leitkoeff. α_k sei gut durch eine rationale Zahl $\frac{a}{q}$ approximiert, nämlich so, dass $|\alpha_k - \frac{a}{q}| \le \frac{1}{q^2}$, wo $a \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Es sei $K = 2^{k-1}$, $\varepsilon > 0$, dann ist

$$S \ll_{a,\varepsilon} \underbrace{N^{1+\varepsilon}}_{\text{triv. Abschätz.}} \underbrace{\left(N^{-1} + q^{-1} + N^{-k} q\right)^{1/K}}_{\text{Verbesserung, je kleiner } K \text{ desto besser.}}.$$

7.7. Mittlerweile ist diese Absch. überholt. Vinogradov selbst konnte für $N \le q \le N^{k-1}$ die Absch. $S \ll_k N^{1-1/(11k^2 \log k)}$ zeigen.

Vinogradov's Methode verwendet nichttriviale Absch. für das Vinogradov-Integral $J_{s,k}(N) = \int_{[0,1]^k} |S_N(\underline{\alpha})|^{2s} d\underline{\alpha}$, $S_N(\underline{\alpha}) = S$ wie oben.

Anders ausgedrückt, ist $J_{s,k}(N)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen des Vinogradov-Systems

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 + \dots + m_s = n_1 + \dots + n_s \\ m_1^2 + \dots + m_s^2 = n_1^2 + \dots + n_s^2 \\ \vdots \\ m_1^k + \dots + m_s^k = n_1^k + \dots + n_s^k \end{array}\right\}$$

mit $1 \le m_1, \dots, m_s, n_1, \dots, n_s \le N$,

welches auch in anderen Anwendungen in der Mathematik vorkommt. Die lange offene Vermutung zur oberen Schranke von $J_{s,k}(N)$ wurde erst kürzlich bestätigt.

7.8. Satz (Bourgain/Demeter/Guth, Wooley 2015): Für $s, k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_{>1}$, ist $\forall \varepsilon > 0$:
("Vinogradovs Mittelwertsatz")

$$J_{s,k}(x) \ll_\varepsilon x^\varepsilon \left(x^s + x^{2s - k(k+1)/2}\right).$$

Der Beweis erfordert entweder umfangreichen Einsatz neuer Ergebnisse der Forschung zur harmonischen Analysis (Restriktionstheorie, [BDG]), oder umfangreiche Überlegungen mit einer Methode namens "effizienten Kongruenzen" nach [Wooley].

Es ist unmöglich, eine obere Schranke für S zu zeigen, die das Vinogradov-Integral $\mathcal{J}_{s,k}(N)$ beinhaltet:

7.9. Satz (Montgomery):

$$S \ll_{k,s} N \cdot \left(\frac{\mathcal{J}_{s,k-1}(3N)}{N^{2s-k(k-1)/2}}\right)^{\frac{1}{2s}} \cdot \left(\frac{1}{q} + \frac{\log(q)}{N} + \frac{q\log(q)}{N^k}\right)^{\frac{1}{2s}}.$$

[Bew.: s. Montgomery "Ten Lectures...", Thm. 4 in §4]

7.10. Kor. aus VMWS:

$$S \ll_k N^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{q} + \frac{\log(q)}{N} + \frac{q\log(q)}{N^k}\right)^{\frac{1}{k(k-1)}}.$$

[Beste bekannte Weylsche Ungl.g. $\rightsquigarrow k = \frac{1}{k(k-1)}$ in 7.6.]

Bew.: Verwende den "kritischen Exponenten" $s = k-1$ in VMWS und setze ein. □

7.11. Bem.: Der Exponent $K = 2^k$ konnte somit auf $k(k-1)$ gedrückt werden. Von Montgomerys Vermutung, dass im Kor. auf den Term $\frac{\log(q)}{N}$ verzichtet werden könnte, und sogar $\frac{1}{k(k-1)}$ zu $\frac{1}{k}$ verbessert bar sei, sind wir womöglich noch weit entfernt.

Ist die Größe der k-ten Ableitung von f bekannt, kann eine obere Schranke der Weylsumme $\sum_{n\le N} e(f(n))$ in Abhängigkeit dieser Größe gezeigt werden:

7.12. Satz (k-ter Ableitungstest, [Heath-Brown 2016] nach VMWS):
Sei $k \ge 3$, $f \in \mathcal{C}^k([0,N],\mathbb{R})$. Weiter sei $0 < \lambda \le |f^{(k)}(x)| \le A\lambda$ für $x \in (0,N)$.
Dann:

$$\sum_{n\le N} e(f(n)) \ll_{A,k,\varepsilon} N^{1+\varepsilon}\left(\lambda^{1/k(k-1)} + N^{-1/k(k-1)} + N^{-2/k(k-1)}\lambda^{-2/k^2(k-1)}\right).$$

Wir geben lediglich die Bausteine dieses Satzes an (ohne Beweis):

7.13. Lemma: Sei $k \ge 2$, f wie in 7.12, sei $A\lambda \le \frac{1}{4}$. Dann ist (für $s \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{n\le N} e(f(n)) \ll H + k^2 N^{1-1/s} \mathcal{N}^{1/2s} \cdot \left(H^{-2s+k(k-1)/2}\, \mathcal{J}_{s,k-1}(H)\right)^{1/2s}$$

mit $H = \lfloor (A\lambda)^{-1/k} \rfloor$ und $\mathcal{N} := \#\left\{m,n \le N;\ \left\|\frac{f^{(j)}(m)}{j!} - \frac{f^{(j)}(n)}{j!}\right\| \le 2H^{-j},\ 1 \le j \le k-1\right\}$.

Dabei ist $\mathcal{J}_{s,k-1}(H)$ das Vinogradov-Integral. [Bew.: Taylorapprox. von f, Weylsummen mit Polynomen wie in Satz 7.9 von Montgomery.]

Weiter besteht die Neuerung von [Heath-Brown] darin, $\mathcal{N}$ besser als wie bislang bekannt war, abzuschätzen:

7.14. **Lemma:** Für $k \geq 3$, f wie in 7.12, $A\lambda \leq \frac{1}{4}$, ist $\mathcal{N} \ll ((k-1)!\,A)^4 \,(N + \lambda N^2 + \lambda^{-2/k}) \log(N)$

Beweis von Satz 7.12:

Setzen wir Lemma 7.14 ein in Lemma 7.13 und verwenden VMVS Satz 7.8 in der Form $\mathcal{J}_{s,k-1}(H) \ll H^{2s-k(k-1)/2+\varepsilon} \underset{s=k(k-1)/2}{=} H^{k(k-1)/2+\varepsilon}$,

so erhalten wir

$$\sum_{n\leq N} e(f(n)) \ll N^{\varepsilon}\Big(\underbrace{\lambda^{-1/k}}_{\text{kann entfallen}} + N^{1-1/k(k-1)} + N\lambda^{1/k(k-1)} + N^{1-2/k(k-1)}\lambda^{-2/k^2(k-1)}\Big).$$

nach etwas Überlegung: die anderen Summanden dominieren

□

Dies ergibt die zur Zeit beste bekannte Absch. von ζ im kritischen Streifen:

7.15. **Satz (Heath-Brown):** Sei $\kappa = \frac{8}{63}\sqrt{15} = 0.4918\ldots$

Für $\varepsilon > 0$ ist dann $\zeta(\sigma + it) \ll_\varepsilon t^{\kappa(1-\sigma)^{3/2}+\varepsilon}$, glm. in $t \geq 1$, $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$.

⌜Ehemaliger Rekord von K. Ford 2002 war 4.45 für κ.⌟

Bew.: Satz 7.12 wird angewendet auf $f(n) = \frac{-t}{2\pi}\log n$

da $n^{-it} = e^{-it\log n} = e\left(\frac{-t}{2\pi}\log n\right)$ gilt. Dieser Satz liefert nun neue Abschätzungen für $\sum_{n\leq N} e(f(n)) = \sum_{n\leq N} n^{-it}$ in Abh. von $\lambda = \frac{t}{2\pi}\cdot(k-1)!\cdot N^{-k}$.

Diese lässt sich weiterbehandeln im Sinne der sogenannten "Exponentenpaartheorie" $\rightsquigarrow \sum_{n\in I} n^{-it} \ll_\varepsilon N^{1-49/80\tau^2+\varepsilon}$, $\tau = \frac{\log t}{\log N} \geq 2$, I bel. Teilintervall von $(N, 2N]$. } ohne Details hier

Part. $\sum \rightsquigarrow \sum_{n\in I} n^{-\sigma-it} \ll N^{-\sigma+1-49/80\tau^2+\varepsilon} \leq t^{(1-\sigma)\tau^{-1} - \frac{49}{80}\tau^{-3}+\varepsilon}$ für $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$. ⌜$N = t^{\tau^{-1}}$⌟

Die Wahl $\tau = \sqrt{\frac{147}{80}\cdot\frac{1}{1-\sigma}}$ zeigt $\sum_{n\in I} n^{-\sigma-it} \ll t^{\kappa(1-\sigma)^{3/2}+\varepsilon}$. Nun kann die Bed. $I \subseteq (N, 2N]$ entfallen mit einer Zusatzüberlegung.

Die Anwendung der approximativen Funktional-Glg., Bem. 7.3.(2), liefert damit auch $\zeta(s) \ll t^{\kappa(1-\sigma)^{3/2}+\varepsilon}$. □

Erhalten so ein verbessertes nullstellenfreies Gebiet:

7.16. **Satz** (nullstellenfreies Gebiet, 2. Version):
Es ist $\zeta(s) \neq 0$ für $t \geq 0$ und $\sigma \geq 1 - \frac{c_0}{(\log t)^{2/3} (\log\log t)^{1/3}}$ für ein $c_0 > 0$.
Dort ist $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll (\log t)^{5/3} (\log\log t)^{1/3}$.

Bew.:
Für $\sigma \geq 1 - A_0 \left(\frac{\log\log t}{\log t}\right)^{2/3} =: 1 - \theta(t)$ für ein $A_0 > 0$, nach Satz 7.15 haben wir

$$\zeta(s) \ll t^{\kappa A_0^{\frac{3}{2}} \frac{\log\log t}{\log t}} = e^{\kappa A_0^{3/2} \log\log t} =: e^{\Phi(t)}.$$

(Vernachlässigen ε $\rightsquigarrow$ κ größer)

Wenden nun den allgemeinen Satz 5.2 zum nullstellenfreien Gebiet von ζ an mit $\Phi(t) = \kappa A_0^{3/2} \log\log t$, $\theta(t) = A_0 \left(\frac{\log\log t}{\log t}\right)^{2/3}$.
Dieses liefert, dass $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > 1 - c_0 \cdot \frac{\left(\frac{\log\log t}{\log t}\right)^{2/3}}{\log\log t} = 1 - \frac{c_0}{(\log t)^{2/3} (\log\log t)^{1/3}}$. ✓
Die Konstante $c_0 > 0$ hängt von κ, A_0 ab (und ist numerisch berechenbar, noch durch geschickte Wahl von A_0).
Dieser zeigt ferner, dass $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll \frac{\log\log t}{\left(\frac{\log\log t}{\log t}\right)^{2/3}} \cdot \log t = (\log t)^{5/3} (\log\log t)^{1/3}$. ✓

□

7.17. **Bem.:** Das in Satz 7.16. nachgewiesene nullstellenfreie Gebiet

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_0}{(\log t)^{2/3} (\log\log t)^{1/3}}$$

wurde bereits von [Korobov & Vinogradov, 1958] gezeigt und konnte bis heute nicht wesentlich verbessert werden.
Der Einfachheit halber haben wir uns nicht um den numerischen Wert der Konstanten c_0 gekümmert.
[K. Ford] zeigte 2002, dass $c_0 = \frac{1}{57.54}$ genommen werden kann.

Die Verwendung des vor Kurzem bewiesenen VMWS um neue effektive Verbesserungen der implizite Konstanten darin führen bislang lediglich zu neuen Verbesserungen in der Konstanten c_0.

Wir zeigen noch, wie die zur Zeit beste Version des PZSes (von Korobov/Vinogradov) jetzt hergeleitet werden kann.

7.18 Satz (PZS mit Fehlerterm, 2. Version):

Es gibt $A_0, \tilde{A}_0 > 0$ mit $\psi(x) = x + O\left(x \exp\left(-A_0 (\log x)^{3/5} (\log\log x)^{-\frac{1}{5}}\right)\right)$

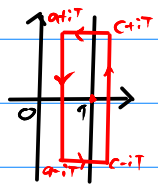
und $\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x \exp\left(-\tilde{A}_0 (\log x)^{3/5} (\log\log x)^{-1/5}\right)\right)$.

Bew.: 1.) Zeige die Formel für ψ:

Dazu sei $T = T(x) > 1$, $c = c(x) = 1 + \frac{1}{\log x}$, $x = m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{N}$.

Nach Lemma 4.2 (aus der Perron'schen Formel)

haben wir $\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x}{T} \log^2(x)\right)$.



Ergänzen den Weg $[c-iT, c+iT]$ zur geschlossenen Kurve

$\mathcal{C} = [c-iT, c+iT] \cup [c+iT, a+iT] \cup [a+iT, a-iT] \cup [a-iT, c-iT]$,

wo $a = 1 - A_0 \left(\frac{\log\log T}{\log T}\right)^{2/3}$, und $A_0 > 0$.

Nach dem Residuensatz ist $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) \frac{x^s}{s} ds = \mathrm{Res}_{s=1}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \cdot \frac{x^s}{s}\right) = x$. ✓

Nach Satz 7.16 ist $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll (\log t)^{5/3} (\log\log t)^{1/3}$.

Es folgen die Abschätzungen:

- horizontal:

$$\left(\int_{a-iT}^{c-iT} + \int_{c+iT}^{a+iT}\right) \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) \frac{x^s}{s} ds = O\left(\frac{x}{T} \cdot (\log T)^{5/3} (\log\log T)^{1/3}\right),$$

$\ulcorner x^c = x \cdot e \ll x \lrcorner$

mon. ↓ in T,

sowie

- vertikal: $\int_{a-iT}^{a+iT} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) \frac{x^s}{s} ds = O\left(x \exp\left(-A_0 (\log x) \left(\frac{\log\log T}{\log T}\right)^{2/3}\right) \cdot \underbrace{(\log T)^{\frac{8}{3}} (\log\log T)^{\frac{1}{3}}}_{\text{Extra-}\log T \text{ von } \int_{-T}^{T} \frac{1}{|a+ti|} dt}\right)$

mon. ↑ in T.

Wähle T optimal so, dass $\underbrace{\frac{x}{T}}_{x \exp(-\log T)} \overset{!}{=} x \exp\left(-A_0 (\log x) \cdot \left(\frac{\log\log T}{\log T}\right)^{2/3} \cdot (\log\log T)^{-1}\right)$

d.h. $T = T(x)$ ist eine Fkt. mit $(\log T)^{\frac{5}{3}} \overset{!}{=} (\log x) (\log\log T)^{-1/3}$,

$\rightsquigarrow$ wähle: $\log T := (\log x)^{3/5} (\log\log x)^{-1/5}$

Erhalten so den Fehlerterm $O\left(x \exp\left(-A_0 (\log x)^{3/5} (\log\log x)^{-1/5}\right)\right)$.

2.) Zeige die Formel für π: Wegen $\vartheta(x) = \psi(x) + O(\sqrt{x} \log(x))$, vgl. Bem. 2.9 b),

folgt dieselbe Formel zunächst auch für $\vartheta(x)$. Dann partielle Σ

genau wie in Kor. 5.5 durchführen und die Konstante A_0

anpassen, dann folgt die behauptete Formel für π. □