Vorlesung Zahlentheorie II (Analytische ZT)

SoSe '23, hhu
K. Halupczok

a6: Explizite Formeln

Stichworte: explizite Formel für ψ, von-Mangoldt-explizite Formel, Restterme und Supremum der Nullstellenrealteile, Formulierungen der (RH)

6.1. Einleitung: Wir formulieren noch den PZS für ψ so, dass die Nullst. von ζ darin direkt auftreten. Eine derartige Formel nennt man explizite Formel.

6.2. Satz (explizite Formel für ψ):
Sei $x = m+\frac{1}{2}$ und $m \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $\rho = \beta + i\gamma$ eine Nst. von ζ mit $0<\beta<1$. Dann ist für $x \geq 1$ und $1 \leq T \leq x$:

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho, |\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x}{T}\log^2(x)\right).$$

Dabei kommen die Nst. in der Summe gemäß ihrer Vielfachheit vor.

Bew.: Verwenden wieder Lemma 4.2 aus der Perronschen Formel, ergänzen den Integrationsweg diesmal um ein Rechteck, das die Nst. von ζ umfasst. Nach Lemma 4.9 gilt für die Anz. der Nst. mit $|\gamma - T| \leq \frac{1}{2}$ die Absch. $N(T+\frac{1}{2}) - N(T-\frac{1}{2}) \ll \log(T)$.

[Es gibt also ein $c_0>0$ und $T' \in [T-\frac{1}{2}, T+\frac{1}{2}]$ mit $|\gamma - T'| \geq \frac{c_0}{\log(T')}$ für alle Nst. $\rho = \beta + i\gamma$ von ζ.
Die Ersetzung von $\sum_{\rho, |\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho}$ durch $\sum_{\rho, |\gamma| \leq T'} \frac{x^\rho}{\rho}$ macht den Unterschied

$$\left| \sum_{\rho, |\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\rho, |\gamma| \leq T'} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \ll \frac{x}{T'} \cdot \log(T'),$$

es genügt also, die Beh. mit T' anstelle T zu zeigen, schreiben im folgenden wieder T für T'.]

Setzen also OE $|\gamma - T| \geq \frac{c_0}{\log(T)}$ (+) für alle Nst. ρ von ζ voraus.

Ergänze den Integrationsweg $[c-iT, c+iT]$ durch

$$\mathcal{C} = [c-iT, c+iT] \cup [c+iT, -\tfrac{1}{2}+iT] \cup [-\tfrac{1}{2}+iT, -\tfrac{1}{2}-iT] \cup [-\tfrac{1}{2}-iT, c-iT].$$

Für $s \in [c+iT, -\frac{1}{2}+iT]$ haben wir nach Lemma 4.9 und (+)

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{|\beta-T|<1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log(T)) = O((N(T+1)-N(T-1))\log(T)) + O(\log(T)) = O(\log^2(T)),$$

damit $\int_{c+iT}^{-1/2+iT} \dots, \int_{-1/2-iT}^{c-iT} \dots = O\left(\frac{x}{T}\log^2(T)\right)$.

Für $s = -1/2 + it$ mit $t \in [-T, T]$ ist nach Lemma 4.9

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{|\gamma-t|<1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log|t|), \text{ also } \int_{-1/2-iT}^{-1/2+iT} \dots = O(x^{-1/2}\log^2(T)).$$

Nach dem Residuensatz ist $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \dots = \mathrm{Res}_1\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\right) + \sum_{\rho, |\gamma|\le T} \mathrm{Res}_\rho\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\cdot\frac{x^s}{s}\right) + \mathrm{Res}_0\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\right)$

$$= x - \sum_{\rho, |\gamma|\le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O(1). \qquad \square$$

6.3. Notation: • Für die nichttrivialen Nullstellen $\rho \in \mathbb{C}$ von ζ schreibt man $\rho = \beta + i\gamma$, wo also $0 < \beta < 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$ (also $|\gamma| > 14$ laut numerischen Werten).

• Werden die Nullstellen mit $\gamma > 0$ durchnumeriert, schreibt man $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Aus der Funktionentheorie ist bekannt, dass sich Nullstellen einer holomorphen Fkt. nirgendwo häufen.

6.4. Bem.: • Man vermutet, dass alle diese Nullstellen einfache Nullstellen sind, so dass in der Summe alle Summanden tatsächlich verschieden sind.

• Ohne O-Termen kann die explizite Formel auch gezeigt werden, eine Verfeinerung des Beweises von 6.2 gibt folgende Version:

6.5. Satz (die von-Mangoldt-explizite Formel):

Sei $\psi_0(x) := \frac{1}{2}\left(\sum_{n<x}\Lambda(n) + \sum_{n\le x}\Lambda(n)\right)$. [also ist $\psi_0(x) = \psi(x)$ für $x \notin \mathbb{Z}$]

Dann ist

$$\psi_0(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) - \log(2\pi),$$

wo ρ genau die Nst. von ζ in $0<\sigma<1$ gemäß Vielfachheiten durchläuft.

[Bew.: s. [Davenport], Kap. 17]

Bem.: Wegen $-\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \sum_{n\ge1}\frac{x^{-2n}}{2n} = -\sum_{n\ge1}\frac{x^{-2n}}{-2n}$, wo $\{-2n; n\in\mathbb{N}\}$ die trivialen Nst. von ζ durchläuft, kann diese explizite Formel in der Form $\psi_0(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi)$ geschrieben werden, wo ρ alle Nst. von ζ durchläuft.

Wir gehen den Zusammenhängen zwischen Nullstellenfreiheit von ζ in $0<\sigma<1$ und PZS-Versionen mit Resttermabschätzung noch genauer auf den Grund.

6.6. **Def.:** Seien $A := \inf\{\alpha;\ \forall \varepsilon>0: \psi(x) = x + O_\varepsilon(x^{\alpha+\varepsilon})\}$,
und $B := \sup\{\beta;\ \exists\, \rho=\beta+i\gamma : \zeta(\rho)=0\}$.

6.7. **Bem.:** A ist also der kleinste Exponent ≤ 1 in der Resttermabschätzung für den PZS in der ψ-Version, und B das Supremum der Realteile der ζ-Nullstellen.

6.8. **Satz:** Es gilt $A=B$. Insbesondere gilt:
$$(RH) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0: \psi(x) = x + O_\varepsilon(x^{1/2+\varepsilon}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0: \pi(x) = li(x) + O_\varepsilon(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Bew.: • $A \le B$: Wende die explizite Formel 6.2 an mit $T=x$.

Für $x = m+\frac{1}{2}$, $m\in\mathbb{N}$, erhalten wir $\psi(x) = x - \sum_{|\gamma|\le x} \frac{x^\rho}{\rho} + O(\log^2(x))$.

Haben $\left|\sum_{|\gamma|\le x} \frac{x^\rho}{\rho}\right| \le 2x^B \left(\sum_{1\le\gamma\le x} \frac{1}{\gamma} + O(1)\right)$.

$\left[\sum_{|\gamma|\le 1} \frac{1}{|\rho|} = O(1)\right.$, nahe 0 liegen keine Nst. von ζ, da $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ & Stetigkeit$\left.\right]$

Wähle J mit $2^J \le x < 2^{J+1}$,
erhalten $\sum_{1\le\gamma\le x} \frac{1}{\gamma} \le \sum_{j=0}^{J} 2^{-j} \sum_{2^j\le\gamma\le 2^{j+1}} 1 = \sum_{j=0}^{J} 2^{-j}\left(N(2^{j+1}) - N(2^j)\right)$.

Haben $N(2^{j+1}) - N(2^j) = O(2^j \log 2^j) = O(j2^j)$ nach Lemma 4.9,
also $\sum_{1\le\gamma\le x} \frac{1}{\gamma} = \sum_{j=0}^{J} O(j) = O(J^2) = O(\log^2(x))$.

Somit folgt: $\psi(x) = x + O_\varepsilon(x^{B+\varepsilon})$ für alle $\varepsilon>0$, also $A\le B$.

• $B \le A$: Es gilt $\forall \varepsilon>0: \psi(x) = x + O_\varepsilon(x^{A+\varepsilon})$.

Für $\sigma>1$ setzen wir $F(s) = -\frac{1}{s}\cdot\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{s-1}$, $G(s) = \int_1^\infty (\psi(x)-x)x^{-s-1}\,dx$.

Eine partielle Summation (für $\sigma>1$) zeigt, dass
$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n\ge1} \Lambda(n) n^{-s} = s\int_1^\infty \psi(x) x^{-s-1}\,dx, \quad \text{vgl. Bew. 1.) in AnZ 15.2}$$
$a_n = \Lambda(n)$, $f(t) = t^{-s}$

also

$$F(s) = -\frac{1}{s}\cdot\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \underbrace{(\psi(x)-x)}_{\ll_\varepsilon x^{A+\varepsilon}} x^{-s-1}\,dx = G(s).$$

Somit ist die Folge $G_N(s) := \int_1^N (\psi(x)-x)\,x^{-s-1}\,dx$ in $\sigma > A$ kp. kgt. gegen $G(s)$.

Damit ist $G(s)$ holom. für $\sigma > A$, und $F(s)$ hat keinen Pol für $\sigma > A$.

Dies heißt $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > A$, woraus $B \leq A$ folgt. □

6.9. Bem.: • Man betrachte auch $\tilde{A} := \inf\{\alpha;\ \forall \varepsilon > 0 : \pi(x) = li(x) + O_\varepsilon(x^{\alpha+\varepsilon})\}$.
Eine partielle Summation zeigt $\tilde{A} = A$. • Ob $A < 1$ bzw. $B < 1$, ist unbekannt.
• Nimmt man die (RH) an, kann für ψ bzw. π eine noch schärfere Asymptotik gezeigt werden:

6.10. Kor.: (RH) $\Rightarrow \psi(x) = x + O(x^{1/2}\log^2(x))$. $\left[\overset{\text{part. }\Sigma}{\Rightarrow} \pi(x) = li(x) + O(x^{1/2}\log(x))\right]$ vgl. 2.19

Bew.: Obiger Bew. in "$A \leq B$" zeigt $\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} = O(x^B \log^2(x))$, also $\psi(x) = x + O(x^B \log^2(x))$.
Ist die (RH) wahr, gilt $B = \frac{1}{2}$, es folgt die Beh. □

6.11. Bem.: • Es gibt noch sehr viele andere Aussagen, die zur (RH) äquivalent sind. Für gewöhnlich kann man für die Implikationen "(RH) $\Rightarrow$ ..." dann Verschärfungen finden.
• Zur Sprechweise: Mathematische Aussagen, die unter der Ann. der (RH) gelten [manchmal auch unter Ann. anderer unbewiesener Vermutungen], heißen konditionell. Aussagen, die ohne Annahme unbewiesener Vermutungen (o.A.u.V.) gezeigt werden können, heißen unkonditionell.
• Es gibt noch weitere "explizite Formeln", etwa folgende:

6.12. Satz (Riemann-explizite Formel): Für $J(x) := \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}\pi(x^{1/k})$ gilt
$$J(x) = Li(x) - \sum_\rho Li(x^\rho) - \log(2) + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\log(t)},$$ wo $Li(x) := \int_0^x \frac{dt}{\log(t)} = \lim_{\varepsilon \to 0+}\left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^x\right)\frac{dt}{\log(t)}$,
wo ρ über die nichttrivialen Nst. von ζ läuft.

[Bew.: [Edwards, §3.7]]