Vorlesung Zahlentheorie II (Analytische ZT)

SoSe '23, hhu
K. Halupczok

a4: Nullstellenanzahlen

Stichworte: Perronsche Formel auf $-\frac{\zeta'}{\zeta}$ angewendet, Satz von Borel-Carathéodory, Größenordnung von ζ, Anzahl $N(T)$ im kritischen Streifen

---

4.1. Einleitung: Wir untersuchen nun, welche Konsequenzen die Anwendung der Perronschen Formel auf die Identität

$$(*) \qquad -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n\geq 1} \Lambda(n) n^{-s} \quad \text{für } \sigma > 1 \qquad \text{hat,}$$

und was zum Beweis eines PZSes mit Restglied noch erforderlich ist. Mit der Abschätzung der Größenordnung von ζ finden wir eine Abschätzung für die Anzahl der ζ-Nullstellen in Rechtecken des kritischen Streifens.

4.2. Lemma: Es sei $x = m + \frac{1}{2}$ für $m \in \mathbb{N}$ und $c = c(x) = 1 + \frac{1}{\log(x)}$. Dann ist

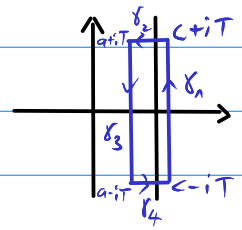
$$\psi(x) = \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) \cdot \frac{x^s}{s}\, ds + O\left(\frac{x \log^2(x)}{T}\right).$$

Bew.: Wende die Perronsche Formel Satz 3.12 an mit $a_n = \Lambda(n)$ auf $(*)$ mit der Koeffizientenbeschränkung $\Phi(x) = \log(x)$.
Da $D(s) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ einen Pol 1. Ordnung in $s = 1$ besitzt, folgt

$$\sum_{n\geq 1} \Lambda(n) n^{-\sigma} = O\left((\sigma-1)^{-1}\right), \quad \sigma \to 1^+.$$

Können in Satz 3.12 $\alpha = 1$ wählen. Die drei Fehlerterme darin sind alle durch $O\left(\frac{x}{T}\log^2(x)\right)$ beschränkt. $\square$

Im folgenden ergänzen wir den Integrationsweg $[c-iT, c+iT]$ zu einer geschlossenen Kurve, die ein Rechteck R im positiven Sinne berandet: $\gamma = [c-iT, c+iT] \cup [c+iT, a+iT] \cup [a+iT, a-iT] \cup [a-iT, c-iT]$, $a<1<c$.



Die einzige in R enthaltene Singularität von $\frac{\zeta'}{\zeta}$ soll $s=1$ sein, so dass das $\int$ durch den Residuensatz ausgewertet werden kann. Dazu muss die Nullstellenfreiheit von ζ in R sichergestellt sein.

Ergebnisse aus AnZ: $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > 1$,

und $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma = 1$ (Hadamard/de la Vallée-Poussin).

Dies reicht nur, um die Asymptotik im PZS zu zeigen. Um eine Version mit Fehlerterm zu erhalten, müssen wir die Existenz eines nullstellenfreien Gebietes im kritischen Streifen zeigen.

Dafür stellen wir einige Hilfsmittel aus der Funktionentheorie bereit.

43. **Satz (Borel–Carathéodory):** Die Fkt. f sei holomorph auf einem Gebiet, das $|s| \le R$ enthält. Sei $f(0)=0$ und $\operatorname{Re} f(s) \le M$ für alle $|s| \le R$. Dann gilt für $|s| \le r < R$ die Abschl. $|f(s)| \le \frac{2Mr}{R-r}$, $|f'(s)| \le \frac{2MR}{(R-r)^2}$.

Bew.: • Zeige zunächst: $\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \le \frac{2M}{R^k}$ für alle $k \ge 1$. ⊛

⌈ Subst. $s = Re(\theta)$ gibt mit Cauchy-Ş-formel $\qquad (e(\theta) := e^{2\pi i\theta})$

$$\int_0^1 f(Re(\theta))\,d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=R} f(s)\frac{ds}{s} = f(0) = 0.$$

Für $k>0$ ist $\int_0^1 f(Re(\theta))\,e(k\theta)\,d\theta = \frac{R^{-k}}{2\pi i}\int_{|s|=R} f(s)\,s^{k-1}\,ds = 0$

und $\int_0^1 f(Re(\theta))\,e(-k\theta)\,d\theta = \frac{R^k}{2\pi i}\int_{|s|=R} f(s)\,s^{-k-1}\,ds = \frac{R^k f^{(k)}(0)}{k!}$.

Durch Linearkomb. folgt für $\phi \in \mathbb{R}$ bel.

$$\int_0^1 f(Re(\theta))\,(1+\cos(2\pi(k\theta+\phi)))\,d\theta = \frac{R^k}{2k!}\cdot e(-\phi)\,f^{(k)}(0)$$

und $\operatorname{Re}\left(\frac{R^k}{2k!}e(-\phi)\,f^{(k)}(0)\right) \le M\int_0^1 (1+\cos(2\pi(k\theta+\phi)))\,d\theta = M$

für alle $k>0$. Wähle ϕ so, dass $e(-\phi)\,f^{(k)}(0) = |f^{(k)}(0)|$. Es folgt ⊛. ⌋

• Aus ⊛ folgt $|f(s)| \le \sum_{k\ge1}\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| r^k \le 2M\sum_{k\ge1}\left(\frac{r}{R}\right)^k = \frac{2Mr}{R-r}$

und $|f'(s)| \le \sum_{k\ge1}\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| k r^{k-1} \le \frac{2M}{R}\sum_{k\ge1} k\left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} = \frac{2MR}{(R-r)^2}$. □

4.4. **Lemma:** Sei f holom. in Gebiet, das $|s-s_0|\le r$ umfasst. Sei $M>1$ so, dass $\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right|<e^M$ auf $|s-s_0|\le r$ gilt. Dann ex. $A>0$ mit

$$\left|\frac{f'(s)}{f(s)}-\sum_{\varrho}\frac{1}{s-\varrho}\right|<\frac{AM}{r} \quad \text{für } |s-s_0|\le\frac{r}{4},$$

wobei ϱ die Nullst. von f in $|s-s_0|\le\frac{r}{2}$ (mit Vielfachheiten) durchläuft.

Bew.: Setze $g(s)=f(s)\cdot\prod_{\varrho}\frac{1}{s-\varrho}$, ist für $|s-s_0|\le r$ hol., auf $|s-s_0|\le\frac{r}{2}$ ist $g\neq 0$.
Auf dem Rand $|s-s_0|=r$ gilt $|s-\varrho|\ge\frac{r}{2}\ge|s_0-\varrho|$,
also $\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right|=\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right|\cdot\left|\prod_{\varrho}\frac{s_0-\varrho}{s-\varrho}\right|\le\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right|\underset{\text{Vor.}}{\le}e^M$,
nach dem Maximumsprinzip gilt dies auch für $|s-s_0|\le r$.
Setze $h(s)=\mathrm{Log}\left(\frac{g(s)}{g(s_0)}\right)$, wo Log die anal. Fkt. von $\log:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ sei.
Dann ist h hol. für $|s-s_0|\le\frac{r}{2}$. Weiter ist $h(s_0)=0$ und $\mathrm{Re}\,h(s)\le M$.
Nach Satz 4.3 von Borel-Carathéodory ist $|h'(s)|\le\frac{2M\cdot r/2}{(r/2-r/4)^2}\le\frac{AM}{r}$ für $|s-s_0|\le\frac{r}{4}$. □

4.5 **Lemma:** Sei f holom. in Gebiet, das $|s-s_0|\le r$ umfasst. Sei $M>1$ so, dass $\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right|<e^M$ auf $|s-s_0|\le r$ gilt, und f habe keine Nullst. im Halbkreis $\{|s-s_0|\le r;\ \mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,s_0\}$.

(i) Dann gilt $-\mathrm{Re}\,\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}<\frac{AM}{r}$. (Für $A>0$ aus Lemma 4.4.)

(ii) Hat f eine Nullst. ϱ_0 auf der Strecke $[s_0-\frac{r}{2},s_0)$, dann ex. $A>0$ mit $-\mathrm{Re}\,\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}<\frac{AM}{r}-\frac{1}{s_0-\varrho_0}$.

Bew.: Aus Lemma 4.4 folgt $-\mathrm{Re}\,\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}<\frac{AM}{r}-\underbrace{\sum_{|\varrho-s_0|\le r/2}\mathrm{Re}\,\frac{1}{s_0-\varrho}}_{\text{in (ii): behalte nur den einen Summanden } \mathrm{Re}\frac{1}{s_0-\varrho_0}=\frac{1}{s_0-\varrho_0}}$. Aus $\mathrm{Re}\,\frac{1}{s_0-\varrho}\ge 0$ für alle ϱ in der Σ folgt die Beh. (i). □

4.6. **Lemma (einfache O.S. für ζ):** Es sei $m \in \mathbb{Z}$, $\delta > 0$. Für $\sigma = -m + \delta$, $|s-1| \geq 1$ ist $\zeta(s) = O_{m,\delta}(t^{m+1})$ für $|t| \to \infty$.

Bew.: Nach der allg. Eulerschen Σ-Formel Satz 4.7 für ζ mit $\sigma > 1$, $\varepsilon < \frac{1}{2}$,

$g(u) = u^{-s}$, $g^{(k)}(u) = (-1)^k s(s+1)\cdots(s+k-1)u^{-(s+k)}$ ist

$$\zeta(s) = \lim_{x\to\infty}\left(\int_{1-\varepsilon}^{x} g(u)\,du + \sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+1}\left(g^{(k)}(x)P_k(x) - g^{(k)}(1-\varepsilon)P_k(1-\varepsilon)\right) + (-1)^m\int_{1-\varepsilon}^{x} g^{(m+1)}(u)P_m(u)\,du\right)$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0+} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - P_0(x)x^{-s} + \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}s(s+1)\cdots(s+k-1)\cdot\left(x^{-(s+k)}P_k(x) - P_k(1)\right)\right)$$
$$+ (-1)^m s(s+1)\cdots(s+m)\int_1^\infty u^{-(s+m+1)}P_m(u)\,du$$

$$= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k P_k(1)\,s(s+1)\cdots(s+k-1)$$
$$+ (-1)^m s(s+1)\cdots(s+m)\underbrace{\int_1^\infty u^{-(s+m+1)}P_m(u)\,du}_{\text{konv. für } \sigma > -m}.$$

$\rightsquigarrow$ Darst. gilt für $\sigma > -m$.

Haben: $\int_1^\infty u^{-(s+m+1)}P_m(u)\,du = O(1)$.

Für $1 \leq k \leq m+1$ ist $s(s+1)\cdots(s+k-1) = O_m(|t|^k)$, $|t| \to \infty$. $\square$

4.7. Satz 1.6 war nur die einfache Version der Euler Σ-Formel. Hier wird die allg. Euler-Maclaurin-Σ-Formel benutzt [mit $P_k(x) = \frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(x - \lfloor x \rfloor)$, $B_0(x) = 1$, $B_k'(x) = k\,B_{k-1}(x)$.]

Für $m = 0$ enthält diese als Spezialfall die einfache Euler-Σ-Formel.

Der Beweis der Euler-Maclaurin-Σ-Formel ist genauso durch Nachrechnen möglich.

4.8. **Def.:** Sei $T > 0$. Mit $N(T)$ bezeichne die Anz. der Nullst. von ζ mit $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ und $0 < \mathrm{Im}(s) < T$.

4.9. **Lemma:** Es ist $N(T+1) - N(T) = O(\log(T))$ für $T \to \infty$.

Für $m \in \mathbb{N}$ und $s = \sigma + it$ mit $\sigma \geq -m$, $t > 0$, $\zeta(s) \neq 0$ gilt

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{|\mathrm{Im}(\rho) - t| \leq 1}\frac{1}{s-\rho} + O_m(\log(t)), \quad t \to \infty.$$

(t groß)

Bew.: Wende Lemma 4.4 an mit $f=\zeta$, $s_0 = 2+it$, $r = 4(m+3)$.

Es ist $|\zeta(s_0)| = \prod_p \frac{1}{|1-p^{-s_0}|} \geq \prod_p \frac{1}{1+p^{-2}} \gg 1$.

Nach Lemma 4.6 sind die Vor. von Lemma 4.4 mit $M = 4(m+3)\log(t)$ erfüllt, falls $t \geq t_0$ hinr. groß. Für $|s-s_0| \leq \underbrace{m+3}_{=r/4}$ erhalten wir dann

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \sum_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho}\right| = O_m(\log(t)), \quad (*)$$

wo ϱ alle Nst. von ζ mit $|\varrho - s_0| \leq 2(m+3)$ entsprechend Vielfachheit durchläuft.

Wende $(*)$ mit $s=s_0$, $m=2$ an: Mit $\frac{\zeta'}{\zeta}(s_0) = O(1)$ für $t\to\infty$ (L. 4.6, $m=-1$) folgt

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{|\varrho-s_0|\leq 10} \frac{1}{s_0-\varrho}\right) = O(\log(t)). \quad (+)$$

Für $\varrho = \beta + i\gamma$ ist $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s_0-\varrho}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\bar{s}_0-\bar{\varrho}}{|s_0-\varrho|^2}\right) = \frac{2-\beta}{|s_0-\varrho|^2}$.

Es ist $2-\beta \geq 1$, $|s_0-\varrho|^2 \leq 100$, also $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s_0-\varrho}\right) \geq \frac{1}{100}$ $\underset{(+)}{\Rightarrow}$ $N(t+1)-N(t) = O(\log(t))$.

Aus $(*)$ folgt für $|s-s_0| \leq m$ die Absch.

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \sum_{\substack{|\mathrm{Im}(\varrho)-t|\leq 1 \\ |\varrho-s_0|\leq 2(m+3)}} \frac{1}{s-\varrho}\right| = O_m(\log(t)) + O_m\Big(\sum_{|\mathrm{Im}(\varrho)-t|>1} \frac{1}{s-\varrho}\Big) = O_m(\log(t))$$

$\rightsquigarrow |s-\varrho| \geq |\mathrm{Im}(\varrho)-t| > 1$

wegen $N(t+1)-N(t) = O(\log(t))$.

$$\ll \sum_{1\leq m\leq 2m+3} \sum_{\substack{\varrho: \\ t+m \leq \mathrm{Im}(\varrho) \leq t+m+1}} \frac{1}{s-\varrho} \qquad \square$$

Anz. Summ. ist $\ll_m \log(t)$