Vorlesung Zahlentheorie II (Analytische ZT)

SoSe '23, hhu
K. Halupczok

a3: Dirichletreihen, Perronsche Formel

Stichworte: Dirichletreihen, ihr Konvergenzverhalten, Zusammenhang mit zahlentheoretischen Funktionen, Koeffizientensumme, Perronsche Formel

---

3.1. Einleitung: Wir wiederholen die wichtigsten Eigenschaften von Dirichletreihen. Ein zentrales Werkzeug zur Auffindung einer asymptotischen Formel für die Koeffizientensumme einer Dirichletreihe ist die Perronsche Formel, welche auch Abschätzungen des Restterms in der Asymptotik liefern kann.

3.2 Def: Eine Dirichletreihe ist eine unendl. Reihe der Form $D(s)=\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$, die $a_n \in \mathbb{C}$, $s\in\mathbb{C}$. ($s=\sigma+it$)
Es stellt sich die Frage nach dem Konvergenzbereich.

3.3. Satz (Kgz. trichter): Es sei $D(s)$ in einem Pkt. s_0 konvergent. Dann konvergiert $D(s)$ gleichmäßig in dem Winkelraum / Konvergenztrichter $|\arg(s-s_0)|<\frac{\pi}{2}-\delta$ für festes $\delta>0$. Die Fkt. $D(s)$ ist demnach in $\{\sigma>\sigma_0\}$ holomorph.
Bew.: s. AnZ 4.4.

3.4. Satz: Zu jeder Dirichletreihe $D(s)$ gibt es stets ein $\sigma_c\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, so dass $D(s)$ für alle $s=\sigma+it$ mit $\sigma>\sigma_c$ kgt., und für $\sigma<\sigma_c$ div.
Zu $D(s)$ existiert auch stets ein $\sigma_a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, so dass $D(s)$ für alle $s=\sigma+it$ mit $\sigma>\sigma_a$ absolut kgt., und für $\sigma<\sigma_a$ nicht.
Man hat, falls $\sigma_c\in\mathbb{R}$, $\sigma_c\leq\sigma_a\leq\sigma_c+1$ (*). Bew.: AnZ 4.7.

Hinweis zu (*): Ist $\sum a_n n^{-s_1}$ bei s_1 kgt., dann ist $(a_n n^{-s_1})$ beschr., etwa durch B. Für $\varepsilon>0$ ist $\sum|a_n n^{-s_1-1-\varepsilon}|\leq B\sum n^{-1-\varepsilon}$, d.h. absolute Kgz. bei $s_1+1+\varepsilon$.

3.5. Def.: σ_c heißt Konvergenzabszisse, σ_a heißt absolute Konvergenzabszisse von $D(s)$.

3.6. Satz von Landau: Ist σ_c die Kgz.abszisse von $F(s)=\sum a_n n^{-s}$ und $\forall n: a_n\geq 0$, dann ist F nicht in $s=\sigma_c$ holomorph fortsetzbar. (z.B. ist ζ nicht in $s=1$ hol. fortsetzbar)
Bew.: s. AnZ 7.

3.7. **Identitätssatz:** Seien $F(s)=\sum a_n n^{-s}$, $G(s)=\sum b_n n^{-s}$ kgt. für $\sigma>\sigma_c$.
Es gebe eine Folge $(s_m)=(\sigma_m+i\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\sigma_m \xrightarrow{m\to\infty} \infty$ und
$\forall m\in\mathbb{N}: F(s_m)=G(s_m)$. Dann gilt $\forall m\in\mathbb{N}: a_m=b_m$. Bew.: AnZ 4.12.

Bem.: Dieser Satz wird in der Literatur gelegentlich falsch wiedergegeben. Es genügt nicht, eine Übereinstimmung von F und G auf Kompakta vorauszusetzen.

3.8. **Multiplikationssatz:** Seien $F(s)=\sum a_n n^{-s}$, $G(s)=\sum b_n n^{-s}$ abs. kgt. (in s). Dann hat $H(s)=F(s)G(s)$ die Gestalt $H(s)=\sum c_n n^{-s}$ mit $c_n=\sum_{d|n} a_d b_{n/d}$ (d.h. $c=a*b$).
Die Reihe $\sum c_n n^{-s}$ kgt. ebenfalls absolut (in s).

Bew.: Nach dem Produktsatz für Reihen und der vorausgesetzten abs. kgz. kann $F(s)G(s)$ ausmultipliziert und in beliebiger Anordnung aufsummiert werden:
$$F(s)G(s)=\sum_{n,m} a_n b_m (nm)^{-s} = \sum_k k^{-s} \sum_{nm=k} a_n b_m = \sum_k c_k k^{-s}. \qquad \square$$

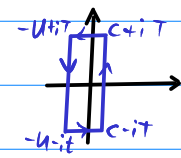
3.9. **Def.:** zahlentheoretische Funktion: Funktion $A:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ bzw. komplexwertige Folge (a_n).
Dirichlet-Produkt zweier zth. Fktn. a und b ist $a*b=c$ mit $c_n=\sum_{d|n} a_d b_{n/d}$.
ihre erzeugenden Dirichletreihen: $A(s)=\sum a_n n^{-s}$, $B(s)=\sum b_n n^{-s}$.

3.10. **Satz:** Die zth. Fktn. bilden mit $*$ eine abelsche Halbgruppe mit Einselement ε, $\varepsilon(n)=\lfloor \frac{1}{n}\rfloor$.
"1-Erkennungsfkt."
Die zth. Fktn. f mit $f(1)\neq 0$ " " " Gruppe.
Die Möbiusfunktion $\mu(n)=\begin{cases}(-1)^r, & n=p_1\cdots p_r \text{ mit p.w.v. } p_1,\dots,p_r \text{ prim},\\ 1, & n=1,\\ 0, & \text{sonst, d.h. } \exists p \text{ prim}: p^2|n\end{cases}$
ist Faltungsinverse der Fkt. $\mathbb{1}(n)=1$ d.h. $\mu*\mathbb{1}=\varepsilon$.
"Möbiussche Umkehrformel"
Bew.: AnZ 2.3.

In Anwendungen kommt es oft vor, dass man von den analytischen Eigenschaften einer Dirichletreihe $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ auf ihre Koeffizientensumme $\sum_{n\leq x} a_n$ schließen will. Die Funktionentheorie liefert gute Werkzeuge dafür; ein neues und wichtiges erarbeiten wir jetzt.

Zur Vorbereitung zunächst folgendes Hilfsergebnis zu komplexen Integralen:

3.11. **Lemma:** Es seien $c,T,y>0$. Dann ist für $T\to\infty$:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s}\,ds = \begin{cases} 1+O(y^c T^{-1}|\log(y)|^{-1}), & \text{falls } y>1,\\ O(y^c T^{-1}|\log(y)|^{-1}), & \text{falls } 0<y<1. \end{cases} \qquad (y\neq 1)$$



Bew.: • Sei $y>1$. Für $u>0$ zeigt der Residuensatz:

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-u-it}^{c-iT}+\int_{c-iT}^{c+iT}+\int_{c+iT}^{-u+iT}+\int_{-u+iT}^{-u-iT}\right)\frac{y^s}{s}\,ds=\operatorname{Res}_{s=0}\left(\frac{y^s}{s}\right)=1.$$

$y^s=\exp(s\log(y))=1+\frac{s\log(y)}{1}+\frac{s^2\log^2(y)}{2!}+\dots$

• Haben $\left|\left(\int_{c+iT}^{-u+iT}+\int_{-u-iT}^{c-iT}\right)\frac{y^s}{s}\,ds\right|\le\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{c}y^\sigma d\sigma=O\left(y^cT^{-1}|\log(y)|^{-1}\right)$

und $\left|\int_{-u-iT}^{-u+iT}\frac{y^s}{s}\,ds\right|=O\left(Ty^{-u}|\log(y)|^{-1}\right)\xrightarrow[y>1]{u\to\infty}0$. Es folgt: $\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}\,ds=1+O\left(y^cT^{-1}|\log(y)|^{-1}\right)$.

• Sei $0<y<1$. Nach dem Cauchyschen $\int$-Satz ist

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{u-it}^{c-iT}+\int_{c-iT}^{c+iT}+\int_{c+iT}^{u+iT}+\int_{u+iT}^{u-iT}\right)\frac{y^s}{s}\,ds=0.$$

Wie oben gilt $\left|\left(\int_{c+iT}^{u+iT}+\int_{u-iT}^{c-iT}\right)\frac{y^s}{s}\,ds\right|\le\frac{1}{T}\int_{c}^{\infty}y^\sigma d\sigma=O\left(y^cT^{-1}|\log(y)|^{-1}\right)$

und $\left|\int_{u-iT}^{u+iT}\frac{y^s}{s}\,ds\right|=O\left(Ty^{u}|\log(y)|^{-1}\right)\xrightarrow[0<y<1]{u\to\infty}0$. Es folgt die Beh. $\square$

Die Koeffizientensumme einer Dirichletreihe erhalten wir damit wie folgt:

3.12. Satz (Perronsche Formel):

Es sei $D(s)=\sum_{n\ge1}a_nn^{-s}$ für $\sigma>1$ abs. kgt. Mit einer für $x\ge x_0$ mon. w. positiven Fkt. $\Phi(x)$ und einer Konstanten $C>0$ sei $|a_n|<C\cdot\Phi(x)$ für alle $n\le x$.
Es sei $\sum_{n\ge1}|a_n|n^{-\sigma}=O\left((\sigma-1)^{-\alpha}\right)$ bei $\sigma\to1+$ für ein festes $\alpha>0$,
sowie $c>1$, $x>1$, $x\notin\mathbb{Z}$, $T>0$. Dann gilt

$$\sum_{n\le x}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}D(s)\frac{x^s}{s}\,ds+$$
$$+O\left(\frac{x^c}{T(c-1)^\alpha}\right)+O\left(\frac{x\,\Phi(2x)\log(2x)}{T}\right)+O\left(\frac{x\,\Phi(2x)}{T\cdot\|x\|}\right)\quad\text{für } T\to\infty,$$

wobei $\|x\|:=\min\{|x-z|;\,z\in\mathbb{Z}\}$ der Abstand von x zur nächsten ganzen Zahl ist.

Bew. von Satz 3.12 (Perronsche Formel):

Da $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ glm. auf $[c-iT, c+iT]$ kgt., zeigt Lemma 3.11, dass

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} D(s)\frac{x^s}{s}\,ds = \sum_{n\geq 1} a_n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s ds\right) = \sum_{n<x} a_n + O\Big(\frac{x^c}{T}\underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{|a_n|}{n^c\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|}}_{=:\Sigma_0}\Big).$$

Spalte Σ_0 auf in $\Sigma_0 = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$ mit $\Sigma_1 = \sum_{n<x/2}\dots$, $\Sigma_2 = \sum_{n>2x}\dots$, $\Sigma_3 = \sum_{\frac{x}{2}\leq n\leq 2x}\dots$

- Für $n<\frac{x}{2}$ oder $n>2x$ ist $\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right| > \log(2)$,
  also $\Sigma_1 + \Sigma_2 = O\left(\sum_{n\geq 1}|a_n| n^{-c}\right) = O\left((c-1)^{-\alpha}\right)$ nach Vor. ✓

- Absch. von Σ_3: Sei $N\in\mathbb{N}$ so, dass $|x-N| = \|x\|$. Für $N<n\leq 2x$ sei $r := n-N$.
  Wegen $x\leq N+\frac{1}{2}$ gilt $\log\left(\frac{n}{x}\right) \geq \log\left(\frac{N+r}{N+1/2}\right) = \log\left(1+\frac{r-1/2}{N+1/2}\right)$.
  Laut MWS ist $\log(1+u)\geq c_0 u$ für $0\leq u\leq 1$,
  und $\log\left(1+\frac{r-1/2}{N+1/2}\right) \geq c_0\frac{r-1/2}{N+1/2} \geq c_1\cdot\frac{r}{x}$, wo $c_0, c_1>0$ feste Konstanten.

Also: $$\sum_{N<n\leq 2x}\frac{|a_n|}{n^c\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|} = O\Big(\Phi(2x)\,x^{1-c}\sum_{1\leq r\leq 2x}\frac{1}{r}\Big) = O\big(\Phi(2x)\,x^{1-c}\log(2x)\big).$$

Genauso: $$\sum_{x/2\leq n<N}\frac{|a_n|}{n^c\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|} = O\big(\Phi(2x)\,x^{1-c}\log(2x)\big),$$ und für $n=N$ ist

$$\frac{|a_N|}{N^c\left|\log(x/N)\right|} = O\left(\frac{\Phi(N)}{N^c\left|\log\left(1+\frac{x-N}{N}\right)\right|}\right) = O\left(\frac{\Phi(2x)\,x^{1-c}}{\|x\|}\right).$$

□

3.13. **Bem.:** Die Perronsche Formel ist ein wichtigstes Werkzeug, um aus den analytischen Eigenschaften einer Dirichletreihe auf die Asymptotik bzw. Abschätzung der Koeffizientensumme $\sum_{n\leq x} a_n$ zu schließen.
Eine wichtige Anwendung ist bereits der Fall der 2. Tsch.-Fkt.
$\psi(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)$, die zur Dirichletreihe $\sum_{n\geq 1}\Lambda(n)n^{-s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ gehört.

Beachten $\left(\sum_n \Lambda(n)n^{-s}\right)\left(\sum_m m^{-s}\right) = \sum_k (\Lambda * \mathbb{1})(k)\,k^{-s} = \sum_k (\log k)\cdot k^{-s} = -\zeta'(s)$ für $\sigma>1$.

Die Nullstellen des Nenners $\zeta(s)$ sind die Pole von $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$, die laut Residuensatz zum $\int$ der Perronformel beitragen.