Vorlesung Zahlentheorie II (Analytische ZT)

SoSe '23, hhu
K. Halupczok

a21: Der Satz von Bombieri-Vinogradov

Stichworte: Große-Sieb-Ungleichung für Charaktersummen, Vaughans Identität, Satz von Bombieri-Vinogradov, level of distribution, Elliott-Halberstam-Vermutung

---

21.1. Einleitung: Wir zeigen den Satz von Bombieri-Vinogradov, der Beweis folgt modernen Methoden. Benötigt wird die große-Sieb-Ungleichung für (bilineare) Charaktersummen, sowie die Vaughan-Identität als eine Art kombinatorisches Hilfsmittel. Der Gültigkeitsbereich des Satzes von B-V liefert den level of distribution.

21.2. Satz (Das große Sieb für Charaktersummen): Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$. Dann:

(i) $$\sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(q)}\Big|\sum_{n=M}^{M+N}a_n\chi(n)\Big|^2 \le (N+Q^2)\sum_{n=M}^{M+N}|a_n|^2$$

(ii) $$\sum_{R<q\le Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(q)}\Big|\sum_{n=M}^{M+N}a_n\chi(n)\Big|^2 \le \Big(\frac{N}{R}+Q\Big)\sum_{n=M}^{M+N}|a_n|^2,$$

$\uparrow$ alle primitiven χ mod q wo $R, Q, M, N \ge 1$.

Bew.:

Haben $$\Big|\sum_n a_n\chi(n)\Big|^2 = \frac{1}{q}\Big|\sum_{a=1}^{q}\sum_n \bar\chi(a)e\Big(\frac{an}{q}\Big)a_n\Big|^2,$$

da $\bar\chi(n)\tau(\chi) = \sum_{a(q)}\chi(a)e\Big(\frac{an}{q}\Big)$ laut Beweisende von L. 12.8, mit $|\tau(\chi)|^2 = q$

Summation über χ zeigt $$\sideset{}{^*}\sum_{\chi(q)}\Big|\sum_n a_n\chi(n)\Big|^2 \le \frac{1}{q}\sum_{\chi(q)}\Big|\sum_{a=1}^{q}\sum_n \bar\chi(a)e\Big(\frac{an}{q}\Big)a_n\Big|^2$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{a,b=1}^{q}\sum_{m,n}\sum_{\chi(q)}\bar\chi(a)\chi(b)e\Big(\frac{an-bm}{q}\Big)a_n\overline{a_m}$$

$$\overset{\text{OMR}}{=} \frac{\varphi(q)}{q}\sideset{}{^*}\sum_{a(q)}\sum_{m,n}e\Big(\frac{a(n-m)}{q}\Big)a_n\overline{a_m} = \frac{\varphi(q)}{q}\sideset{}{^*}\sum_{a(q)}\Big|S\Big(\frac{a}{q}\Big)\Big|^2,$$

wo $S(\alpha) := \sideset{}{^*}\sum_{a(q)} a_n e(\alpha n)$.

Die Anwendung der große-Sieb-Ungleichung 18.3 zeigt nun (i), und (ii) folgt aus (i) mit p. $\sum$ $\big(f(t)=\frac{1}{t}\big)$. □

21.3. **Bem.:** Direkt aus der C-S-Unglg. folgt damit

$$\sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(q)}\Big|\sum_{m\le M}\sum_{n\le N}a_m b_n\chi(mn)\Big| \overset{C-S}{\ll} (M+Q^2)^{\frac12}(N+Q^2)^{\frac12}\Big(\sum_m|a_m|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_n|b_n|^2\Big)^{\frac12},$$

wir benötigen aber eine leichte Abwandlung davon:

21.4. **Satz:** Für $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(q)}\max_{X}\Big|\sum_{\substack{m\le M,\ n\le N\\ m\cdot n\le X}}a_m b_n\chi(mn)\Big| \ll (M+Q^2)^{\frac12}(N+Q^2)^{\frac12}\Big(\sum_m|a_m|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_n|b_n|^2\Big)^{\frac12}\cdot\log(2MN).$$

Der Beweis von 21.4 benötigt:

21.5. **Lemma:** Sei $T,\beta>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Dann gilt: $\displaystyle\int_{-T}^{T}e^{it\alpha}\frac{\sin(t\beta)}{t}\,dt = \begin{cases}\pi+O\Big(\frac{1}{T(\beta-|\alpha|)}\Big), & |\alpha|<\beta,\\ O\Big(\frac{1}{T(|\alpha|-\beta)}\Big), & |\alpha|>\beta.\end{cases}$

Bew.: Die Beh. ist eine Variante der Perronschen Formel bzw. Lemma 3.11 und kann daraus durch sorgfältigen Grenzübergang für $c\to 0$ gefolgert werden. [Direkter Beweis auch möglich, vgl. [Brüdern, S. 186/187]] □

21.6. **Bew. von Satz 21.4:** • Da für $MN\le X$ die Bed. $mn\le X$ redundant ist, genügt es OE, das Maximum für $X\le MN$ zu erstrecken.

• Für $\gamma_m,\eta_n\in\mathbb{C}$ zeigt 21.5. mit $\beta=\log(X)$, $\alpha=\log(mn)$, dass

$$\sum_{\substack{m\le M,\ n\le N\\ mn\le X}}\gamma_m\eta_n = \int_{-T}^{T}\Big(\sum_{m\le M}\gamma_m m^{it}\Big)\Big(\sum_{n\le N}\eta_n n^{it}\Big)\frac{\sin(t\log(X))}{\pi t}\,dt + O\Big(\frac{1}{T}\sum_{\substack{m\le M\\ n\le N}}|\gamma_m\eta_n|\frac{1}{|\log(\frac{mn}{X})|}\Big).$$

Nimm OE $K=\lfloor X\rfloor+\frac12$, dann ist $\big|\frac{mn}{X}-1\big|\ge\frac{1}{2X}\Rightarrow\big|\log(\frac{mn}{X})\big|\gg\frac{1}{X}\gg\frac{1}{MN}$ laut $MN\ge X$.

Die Abschätzung $\sin(t\log(X))\le\min(1,|t|\log(2MN))$ liefert

$$\sum_{\substack{m\le M,\ n\le N\\ mn\le X}}\gamma_m\eta_n \ll \int_{-T}^{T}\Big|\sum_{m\le M}\gamma_m m^{it}\sum_{n\le N}\eta_n n^{it}\Big|\min\Big(\frac{1}{|t|},\log(2MN)\Big)\,dt + \frac{MN}{T}\sum_{\substack{m\le M\\ n\le N}}|\gamma_m\eta_n|,$$

mit $\max\limits_{X\le MN}$ über die l.S. genommen, da r.S. unabh. von X.

• Setze $\gamma_m=a_m\chi(m)$, $\eta_n=b_n\chi(n)$, $U(t):=\min\Big(\frac{1}{|t|},\log(2MN)\Big)$,

$A(t,\chi):=\sum_{m\le M}a_m\chi(m)m^{it}$, $B(t,\chi):=\sum_{n\le N}a_n\chi(n)n^{it}$.

• Summation über χ und q ergibt dann

$$\sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(q)}\max_{X\le MN}\Big|\sum_{\substack{m\le M\\ n\le N\\ mn\le X}} a_m b_n \chi(mn)\Big| \ll \int_{-T}^{T}\sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(q)}|A(t,\chi)B(t,\chi)|U(t)\,dt + \frac{Q^2MN}{T}\sum_{\substack{m\le M\\ n\le N}}|a_m b_n|$$

21.3 & C-S $\to$ mit $a'_m = a_m m^{it}$, $b'_n = b_n n^{it}$

$$\ll (M+Q^2)^{\frac12}(N+Q^2)^{\frac12}\Big(\sum|a_m|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum|b_n|^2\Big)^{\frac12}\int_{-T}^{T}U(t)\,dt + \frac{Q^2(MN)^{3/2}}{T}\Big(\sum_m|a_m|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_n|b_n|^2\Big)^{\frac12},$$

Mit $T=(MN)^{3/2}$ folgt die Beh. $\square$

Neben Satz 21.4 wird für den Beweis des Satzes von Bombieri-Vinogradov noch eine Summen-Identität benötigt.

21.7. **Lemma** (Vaughans Identität): Seien $U,V\ge 1$ und f eine zahlentheoretische Fkt.

Dann: $\sum_{n\le x}\Lambda(n)f(n) = S_1+S_2+S_3+S_4$ mit $S_i := \sum_{n\le x} a_i(n)f(n)$, $i=1,2,3,4$,

wobei $a_1(n) := \begin{cases}\Lambda(n), & n\le U,\\ 0, & n>U,\end{cases}$ $\quad a_3(n) := \sum_{kl=n,\ l\le V}\mu(l)\log(k)$,

$a_2(n) := -\sum_{klm=n,\ l\le U,\ m\le V}\Lambda(l)\mu(m)$, $\quad a_4(n) := -\sum_{mk=n,\ m>U,\ k>V}\Lambda(m)\sum_{d\mid k,\ d\le V}\mu(d)$.

Bew.: Sei $F(s) := \sum_{n\le U}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$, $G(s) := \sum_{n\le V}\frac{\mu(n)}{n^s}$.

Koeff.vgl. der Glg. $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = F(s) - \zeta(s)F(s)G(s) - \zeta'(s)G(s) + \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - F(s)\right)(1-\zeta(s)G(s))$

ergibt $\Lambda(n) = a_1(n) + a_2(n) + a_3(n) + a_4(n)$,

dies noch mal $f(n)$ nehmen und $\sum_{n\le x}$ darüber zeigt die Beh. $\square$

21.8 **Bem.:** Haben (i) $S_3 = \sum_{l\le V}\mu(l)\sum_{k\le x/l}f(kl)\int_1^k\frac{dy}{y} = \int_1^x\sum_{l\le V}\mu(l)\sum_{y<k\le x/l}f(kl)\frac{dy}{y}$

$$\ll \log(x)\sum_{l\le V}\max_w\Big|\sum_{w<k\le x/l}f(kl)\Big|.$$

(ii) In S_4 ist für $1\le k\le V$ die Glg. $\sum_{d\mid k,\ d\le V}\mu(d)=0$ zu beachten, es folgt also $k>V$ und

$$S_4 = -\sum_{U<m\le x/V}\ \sum_{V<k\le x/m}\Lambda(m)\beta(k)f(km), \quad \beta(k) := \sum_{d\mid k,\ d\le V}\mu(d).$$

(iii) Haben $S_2 = -\sum_{t\le UV} \alpha(t) \sum_{k\le x/t} f(kt)$ mit $\alpha(t) := \sum_{\substack{m\ell=t\\ m\le V,\ \ell\le U}} \Lambda(\ell)\mu(m)$.

Zerlegen $S_2 = S_5 + S_6$ mit Bed. $t\le U$ in S_5 und $U<t\le UV$ in S_6.
Dann kann S_5 wie bei S_3 abgeschätzt werden, da $\sum_{\ell|t}\Lambda(\ell) = \log(t)$, also $|\alpha(t)|\le \log(t)$
und $|S_5| \le \log(x) \sum_{\ell\le U} \max_w \left|\sum_{w<k\le x/\ell} f(k\ell)\right|$.

(iv) Für S_6 ergibt sich $S_6 = -\sum_{U<m\le UV} \sum_{k\le x/m} \alpha(m) f(km)$.

21.9. **Kor.:** Seien $U,V\ge 1$, $UV\le x$, f eine zth. Fkt. Dann gilt $\sum_{U<m\le x} f(m)\Lambda(m) \ll \log(x)T_1 + T_2 + T_3$
mit $T_1 := \sum_{\ell\le \max(U,V)} \max_w \left|\sum_{w<k\le x/\ell} f(k\ell)\right|$, $T_i := \left|\sum_{U<m\le \max(\frac{x}{V},UV)} \sum_{k\le \frac{x}{m}} a_i(m) b_i(k) f(mk)\right|$, $i=2,3$,
wo $a_i(m)$, $b_i(k)$ zth. Fktn. sind, die
nur von U,V abh. sind, für die $|b_i(k)| \le \sum_{t|k} 1$, $|a_i(k)|\le \log(k)$ für alle $k\in\mathbb{N}$ gelte.

Bew.: Setze $a_2(m) := \begin{cases}\Lambda(m), & m\le \frac{x}{V},\\ 0, & \text{sonst},\end{cases}$ $a_3(m) := \begin{cases}\alpha(m), & m\le UV\\ 0, & \text{sonst},\end{cases}$

$b_2(k) := \begin{cases}\beta(k), & \text{für } k>V,\\ 0, & \text{sonst},\end{cases}$ $b_3(k) := 1$.

Dann Lemma 21.7 mit Bem. 21.8: S_1, S_3, S_5 als T_1, S_4 als T_2, S_6 als T_3 abschätzen. □

Ohne Zerlegung von S_2 erhalten wir auch sofort:

21.10. **Kor.:** Seien $U,V\ge 1$, $UV\le x$, f eine zth. Fkt. Dann gilt $\sum_{U<m\le x} f(m)\Lambda(m) \ll \log(x)T_1' + T_2'$
mit $T_1' = \sum_{\ell\le UV} \max_w \left|\sum_{w<k\le x/\ell} f(k\ell)\right|$, $T_2' = \left|\sum_{U<m\le \frac{x}{V}} \sum_{V<k\le \frac{x}{m}} \Lambda(m) b(k) f(mk)\right|$
zth. Fkt., nur von V abh.
mit $|b(k)| \le \sum_{t|k} 1$.

Damit kommen wir zum Hauptergebnis, dazu eine Bezeichnung:

21.11. **Def.:** Für $q\in\mathbb{N}$, $(a,q)=1$, sei $E(x;q,a) := \psi(x;q,a) - \frac{x}{\varphi(q)}$
die Größe des Fehlerterms des PZS in APs, $p\equiv a\ (q)$,
(in der ψ-Version).

21.12. **Satz von Bombieri–Vinogradov [1966]**: Sei $A>1$, $Q\geq 1$. Dann gilt

$$\sum_{q\leq Q}\ \max_{(a,q)=1}\ \max_{y\leq x}|E(y;q,a)| \ll_A \frac{x}{\log^A(x)} + Q\sqrt{x}\cdot\log^6(Qx).$$

21.13. Bem.: • Für $Q\leq \frac{\sqrt{x}}{\log^{A+6}(x)}$ ist die r.S. dann $\ll_A \frac{x}{\log^A(x)}$.

• Die implizite Konstante hängt in nicht angebbarer Weise von A ab wegen der Verwendung des Satzes von Siegel–Walfisz 11.6.

Der wichtigste Schritt zum Beweis ist folgendes Hilfsmittel.

21.14. **Lemma (von Vaughan, auch: "Basic mean value theorem")**: Sei $x,Q\geq 1$. Dann:

$$\sum_{q\leq Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{\chi(q)}^{*}\max_{y\leq x}|\Psi(y,\chi)| \ll \left(x+x^{\frac{5}{6}}Q+\sqrt{x}Q^2\right)\cdot\log^5(Qx).$$

Bew.: Für $Q^2>x$ folgt die Beh. sofort aus Bem. 21.3, angewendet mit $M=1$, $N=x$, $a_1=1$, $b_m=\Lambda(m)$. Sei also $Q^2\leq x$.

Weiter sei $y=y(\chi)\leq x$ so, dass $|\Psi(y,\chi)|=\max_{z\leq x}|\Psi(z,\chi)|$.

Für $U,V\geq 1$ gemäß den Bed. in Kor. 21.9 folgt daraus mit $f=\chi$ die Absch. $|\Psi(y,\chi)|\ll U+\log(x)\,T_1(\chi)+T_2(\chi)+T_3(\chi)$

mit $T_1(\chi)=\sum_{\ell\leq\max(U,V)}\max_{w}\left|\sum_{w<k\leq y/\ell}\chi(k\ell)\right|$, $T_i(\chi)=\left|\sum_{U<m\leq\max(U,V,\frac{x}{V})}\ \sum_{k\leq\frac{x}{m}} a_i(m)b_i(k)\chi(mk)\right|$, $i=2,3$.

Dabei werden U,V nur von x und Q abh. gewählt, so dass

$$\sum_{q\leq Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{\chi(q)}^{*}|\Psi(y(\chi),\chi)|\ll UQ^2+\log(x)K_1+K_2+K_3,\quad K_j:=\sum_{q\leq Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{\chi(q)}^{*}T_j(\chi).$$

Haben für $q>1$, dass $\sum_{w<k\leq z}\chi(k)\ll\sqrt{q}\log(q)$ laut Polya–Vinogradov (Ü B/8 A1(b)), für K_1 (wird $q=1$ triv. abgesch.) folgt

$$K_1\ll\max(U,V)\sum_{2\leq q\leq Q}q^{3/2}\log(q)+\sum_{\ell\leq\max(U,V)}\frac{x}{\ell}\ll\left(Q^{5/2}\max(U,V)+x\right)\log(x).$$

Für K_2, K_3 betr. $M \le x$, und für zth. Fktn. a, b betr. den Ausdruck

$$K_M := \sum_{q\le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)}{}^{*} \Big| \underbrace{\sum_{M<m\le 2M} \sum_{k\le x/m}}_{\to\, k\le \frac{x}{M},\ km\le x} a(m) b(k) \chi(mk) \Big| \underset{\text{Satz } 21.4}{\ll} \log(x)(Q^2+M)^{\frac12}(Q^2+N)^{\frac12} \Big(\underbrace{\sum_{M<m\le 2M} |a(m)|^2}_{\ll M\log^2(M)}\Big)^{\frac12} \Big(\underbrace{\sum_{k\le x/M} |b(k)|^2}_{\ll \frac{x}{M}\log^3(\frac{x}{M})}\Big)^{\frac12}$$

$\forall a: |a(m)| \le \log(m)$ $\qquad$ $\forall b: |b(k)| \le \sum_{\le k} 1$

Es folgt $K_M \ll \log^4(x)\cdot\left(Q^2\sqrt{x} + Qx M^{-\frac12} + Q(xM)^{\frac12} + x\right)$.

Sei $W := \max(UV, \frac{x}{V}) \le x$. Für $M = 2^\nu U$, $\nu = 0,1,2,\dots$ und $M \le W$ summiere auf, mit $\nu \ll \log(x)$ folgt

$$\sum_{q\le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)}{}^{*} \Big| \sum_{U<m\le W} \sum_{k\le x/m} a(m) b(k) \chi(mk) \Big|$$

$$\ll \log^5(x)\left(Q^2\sqrt{x} + Qx U^{-\frac12} + Q(xW)^{\frac12} + x\right),$$

mit $a = a_j$, $b = b_j$ für $j = 2,3$ entstehen die Summen K_j, es folgt

$$K_2 + K_3 \ll \log^5(x)\cdot\left(Q^2\sqrt{x} + Qx U^{-\frac12} + Qx V^{-\frac12} + Q(xUV)^{\frac12} + x\right).$$

• Nun setze $U = V$, $U := \begin{cases} x^{2/3}Q^{-1}, & x^{1/3} \le Q \le x^{1/2}, \quad \left[\to \frac{Qx}{U^{1/2}} \ll \sqrt{x}\,Q^2,\ x^{\frac12}\cdot x^{\frac23} \ll Qx^{\frac56}\right] \\ x^{1/3}, & Q < x^{1/3}. \quad \left[\to \frac{x}{U^{1/2}} = x^{5/6},\ Q^{5/2}x^{\frac13} \ll Q^2\sqrt{x}\right] \end{cases}$

Es folgt die Beh. □

21.15. <u>Beweis des Satzes von B-V:</u> Schreibe $\Psi'(x,\chi) := \begin{cases} \Psi(x,\chi), & \chi \ne \chi_0, \\ \Psi(x,\chi_0) - x, & \chi = \chi_0. \end{cases}$

Dann ist $E(y;q,a) = \Psi(x,q,a) - \frac{y}{\varphi(q)} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \overline{\chi}(a)\Psi'(y,\chi)$,

also

$$\max_{(a,q)=1} |E(y;q,a)| \le \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} |\Psi'(y,\chi)|.$$

Wird $\chi(q)$ von dem primitiven Charakter χ_1 mod q_1 induziert (wo $q_1 \mid q$), gilt

$$\Psi'(y,\chi) - \Psi'(y,\chi_1) \ll \sum_{\substack{n\le y \\ (n,q)>1}} \Lambda(n) = \sum_{p\mid q} \sum_{\substack{k\ge 1 \\ p^k\le y}} \log(p) \ll \log(y)\log(q) \le \log^2(qy),$$

also $\max_{(a,q)=1} |E(y;q,a)| \ll \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} |\Psi'(y,\chi_1)| + \log^2(qy)$.

Das Bilden von $\max_{y\le x}$ und $\sum_{q\le Q}$ darüber liefert

$$\text{l.S.} := \sum_{q\le Q} \max_{y\le x} \max_{(a,q)=1} |E(y;q,a)| \ll \sum_{q\le Q} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \max_{y\le x} |\Psi'(y,\chi_1)| + Q\log^2(Qx).$$

Terme mit demselben χ_1 fassen wir zusammen: Da jeder primitive Charakter χ_1 mod q_1 genau einen Charakter χ zu jedem q mit $q_1 | q$ induziert, folgt

$$\text{l.S.} \ll \sum_{q_1 \le Q} \sum_{\chi_1 (q_1)}^{*} \sum_{\ell \le \frac{Q}{q_1}} \frac{1}{\varphi(q_1 \ell)} \max_{y \le x} |\Psi'(y, \chi_1)| + Q \log^2(Qx).$$

Schreibe χ für χ_1 und q für q_1, wegen $\varphi(q\ell) \ge \varphi(q)\varphi(\ell)$ folgt

$$\text{l.S.} \ll \log(Q) \sum_{q \le Q} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)}^{*} \max_{y \le x} |\Psi'(y, \chi_1)| + Q \log^2(Qx).$$

spalte auf in $q \le Q_1$ ($\rightsquigarrow$ S.-W.!) und $Q_1 < q \le Q$, wähle $Q_1 := \log^{A+6}(x)$.

Eine p.Σ mit Vaughans Lemma 21.14 liefert $\sum_{Q_1 < q \le Q} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)}^{*} \max_{y \le x} |\Psi'(y, \chi)| \ll \left(\frac{x}{Q_1} + x^{\frac{5}{6}} \log(Q) + x^{\frac{1}{2}} Q\right) \log^5(Qx)$.

- Ist nun $q > Q_1$ und $\chi(q)$ primitiv, ist $\Psi(y, \chi) = \Psi'(y, \chi)$, so dass damit im Bereich $Q_1 < q \le Q$ die behauptete Absch. gefunden ist.
- Ist $q \le Q_1$, gilt $\Psi'(y, \chi) \ll_A \frac{x}{\log^{2A}(x)}$ nach dem Satz von Siegel-Walfisz, die l.S. dann $\ll \frac{x}{\log^A(x)}$. Es folgt die Beh. □

21.16. Bem.: • Der Bereich $Q \ll \frac{x^{1/2}}{\log(x)}$ im Satz von B-V ist wesentlich.

- Laut Elliott-Halberstam-Vermutung (EH) müsste für $Q \ll x^{1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ bel., die Abschätzung im Satz von B-V gelten. Diese Vermutung ist neuerdings im Zusammenhang mit dem kleinen PZ-Lückenproblem zentral geworden, vgl. a20.19.
- Gilt die Absch. für $Q \ll x^{\delta - \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ bel., so wird $\delta > 0$ auch als level of distribution bezeichnet. Laut B-V haben wir $\delta = \frac{1}{2}$, laut (EH) gilt vermutlich $\delta = 1$.
- Zahlreiche Varianten des Satzes wurden bis heute veröffentlicht. Speziell diejenigen, bei denen die Moduln q von spezieller Form sind, z.B. Polynomwerte, glatt, usw. Gelegentlich können solche Varianten den von B-V vorgegebenen level of distribution übersteigen und gewinnbringend in dafür zugeschnittenen Anwendungen eingesetzt werden.
- Der Satz von B-V hat zahlreiche Anwendungen in der zth. Literatur. Bombieri wurde (vor allem für diesen Satz) im Jahr 1974 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet.