Vorlesung Zahlentheorie II (Analytische ZT)

SoSe '23, hhu
K. Halupczok

a20: Abschätzung der PZ-Zwillingszählfunktion

Stichworte: PZ-Zwillingssieb für $\pi_2(x)$, o.S. für $\pi_2(x)$, Kleine-PZlücken-Problem, GPY, Prim-k-Tupel-Vermutung (DHL), große-PZlücken-Problem

---

20.1. Einleitung: Hatten $\pi_2(x) := \#\{p \le x;\ p+2 \in \mathbb{P}\}$ als Anzahl der PZ-Zwillinge in 17.10 eingeführt. Wir zeigen mit dem großen Sieb eine nichttriv. obere Abschätzung für $\pi_2(x)$. Es werden Neuerungen im Kleine- und große-PZlücken-Problem erläutert.

20.2. Def.: Das PZ-Zwillingssieb wird erklärt für $Q \le \sqrt{x}+3$ durch

$$\mathcal{A} :=]\sqrt{x}, x] \cap \mathbb{Z},\quad \mathcal{P} := \{p \le Q\},\quad W_p := \{0,-2\},\quad \text{insb. } w(p) = \#W_p = 2.$$

Die gesiebte Menge $S(\mathcal{A},\mathcal{P},Q) := \{n \in \mathcal{A};\ n(p) \notin W_p \text{ für alle } p \in \mathcal{P}\}$

$$= \{n \in \mathcal{A};\ (n(n+2), \prod_{p \le Q} p) = 1\} \quad (\text{vgl. Bsp. } 17.7)$$

besteht dann aus genau den PZen $p' \in]\sqrt{x}, x]$, für die $p'+2$ auch prim ist, sofern $Q > \sqrt{x}+2$ ist.

20.3. Folgerung: Der Satz 17.24 vom großen Sieb liefert

$$\pi_2(x) - \pi_2(\sqrt{x}) \ll (x + Q^2) \cdot \Big(\sum_{q \le Q} g(q)\Big)^{-1}$$

mit $g(q) = \mu^2(q) \prod_{p \mid q} \frac{w(p)}{p - w(p)}$, wobei

$$w(2) = 1,\quad w(p) = 2 \text{ für } p \ge 3 \text{ ist.}$$

Zum Auffinden einer u.S. für $g(q)$ wird g in geeigneter Weise als Faktung geschrieben.

20.4. Lemma: Sei $\omega(q) := \#\{p \mid q\}$ die Anzahl der (versch.) Primteiler von q. Dann gilt für $g(q)$ aus 20.3, dass durch $\varphi(q)\, g(q) = 2^{\omega} * v(q)$ eine multipl. Fkt. v def. wird, für die gilt: $v(2) = 0$, $v(2^k) = 2 \cdot (-1)^{k-1}$ für $k \ge 2$, $v(p) = \frac{4}{p-2}$ für $p \ge 3$, $v(p^k) = 2 \cdot (-1)^{k-1} \frac{p+2}{p-2}$ für $p \ge 3$, $k \ge 2$.

Bew.:

• Für $p \geq 3$ bestätigt $\frac{2p}{p-2} = pg(p) = 2^{\omega} * v(p) = v(p)+2$ die Formel für $v(p)$, $\ulcorner v(p) = \frac{2p-2p+4}{p-2} \checkmark \lrcorner$

und für $k \geq 2$ gilt $g(p^k)=0$, so dass aus $0 = (2^{\omega} * v)(p^k) = v(p^k) + 2 \cdot \sum_{\ell=2}^{k-1} v(p^\ell) + 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{4}{p-2}+1\right)}_{=\frac{p+2}{p-2}}$

mit einer Induktion über k die behaupteten Werte für $v(p^k)$ ergeben.

• Für $p=2$ geht man analog vor. $\ulcorner 2 \cdot \frac{1}{2^1} = 2 \cdot g(2) = 2^{\omega} * v(2) = 2^{\omega(1)} v(2) + 2^{\omega(2)} v(1) = v(2)+2 \Rightarrow v(2)=0 \checkmark$

$0 = (2^{\omega} * v)(2^k) = v(2^k) + 2 \cdot \sum_{\ell=2}^{k-1} v(2^\ell) + 2 \cdot (\underbrace{0}_{v(2)} + \underbrace{1}_{v(1)})$, VI $\lrcorner$ $\square$

20.5. Def.: Wir bilden die Dirichlet-Reihe $V(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{v(n)}{n^s}$.

20.6. Lemma: $V(s)$ Kgt. absolut in $\sigma > \frac{1}{2}$.

Bew.: Für $\sigma > \frac{1}{2}$ und jedes $N > 1$ gilt

$$\sum_{n \leq N} \left|\frac{v(n)}{n^s}\right| \leq \prod_{p \leq N} \left(1 + \sum_{a \geq 1} \frac{|v(p^a)|}{p^{a\sigma}}\right) \leq 7 \prod_{3 \leq p \leq N} \left(1 + \underbrace{\frac{4}{p^\sigma(p-2)}}_{(a=1)} + 10 \sum_{a \geq 2} p^{-a\sigma}\right)$$

$$\leq 7 \underbrace{\prod_{3 \leq p \leq N} \left(1 + \frac{c_1}{p^{\sigma+1}} + \frac{c_2}{p^{2\sigma}}\right)}_{\text{Kgt. für } N \to \infty. \ (\sigma > \frac{1}{2})} \quad \text{für geeignete } c_1, c_2 > 0,$$

$\square$

20.7. Kor.: Für alle $\alpha > \frac{1}{2}$, $\varepsilon > 0$ gilt also

$$\sum_{n > N} \frac{|v(n)|}{n^\alpha} \ll N^{1/2 - \alpha + \varepsilon}. \quad \ulcorner \text{l.S.} = \sum_{n > N} \frac{|v(n)|}{n^{(\alpha - \frac{1}{2} - \varepsilon) + \frac{1}{2} + \varepsilon}} \ll N^{-\alpha + \frac{1}{2} + \varepsilon} \cdot \underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{|v(n)|}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}}_{\ll 1}. \lrcorner$$

20.8. Lemma: Es gilt $\sum_{q \leq Q} g(q) = \frac{1}{2\zeta(2)} V(1) \log^2(Q) + O(\log(Q))$.

Bew.: • Aus $q g(q) = 2^{\omega(d)} * v(q)$ folgt zunächst

$$\sum_{q \leq Q} g(q) = \sum_{d \leq Q} \frac{2^{\omega(d)}}{d} \sum_{r \leq Q/d} \frac{v(r)}{r} = \sum_{d \leq Q} \frac{2^{\omega(d)}}{d} \left(V(1) + O\left(\left(\frac{d}{Q}\right)^{1/4}\right)\right).$$

$(\varepsilon = \frac{1}{4})$ (mit Kor. 20.7)

• Aus $2^{\omega(q)} = \mathbb{1} * \mu^2$ folgt $\sum_{d \leq Q} \frac{2^{\omega(d)}}{d} = \sum_{n \leq Q} \frac{1}{n} \sum_{m \leq Q/n} \frac{\mu^2(m)}{m} =$

$\ulcorner$ r.S. $(p^a) = 1 + \mu^2(p) = 2$, l.S. $(p^a) = 2^1 \checkmark \lrcorner$

$$= \sum_{n \leq Q} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\zeta(2)} \cdot \log\left(\frac{Q}{n}\right) + O(1)\right) = \frac{1}{2\zeta(2)} \log^2(Q) + O(\log(Q)).$$

$\ulcorner \sum_{n \leq Q} \frac{1}{n} \log\left(\frac{Q}{n}\right) = \frac{1}{2} \log^2(Q) + O(\log(Q))$ $\lrcorner$ mit p.Σ. aus Asymptotik für $\sum_{r \leq x} \frac{1}{r}$ $\lrcorner$

$\ulcorner$ p.Σ aus $\mu^2(m) = \sum_{d^2 | m} \mu(d)$ und Asymptotik für $\sum_{r \leq x} \frac{1}{r}$,

nämlich $\sum_{r \leq x} \frac{1}{r} = \log(x) + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$ $\lrcorner$

- Wiederum p. Σ. mit $f(x)=x^{1/4}$ liefert $\sum_{d\le Q}\frac{2^{\omega(d)}}{d^{3/4}}=O(Q^{1/4}\log(Q))$.
- Alles zusammen zeigt

$$\sum_{q\le Q} g(q)=\frac{1}{2\zeta(2)}V(1)\log^2(Q)+O(\log(Q)).$$ □

20.9. **Lemma:** $V(1)\neq 0$.

Bew.: Es ist $\frac{V(1)}{\zeta(2)}$ der Wert von $\frac{V(s)}{\zeta(2s)}=:\sum_{n\ge1}\frac{b(n)}{n^s}$ bei $s=1$.

Da $\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n\ge1}\frac{\mu(n)}{n^s}$, folgt $\frac{1}{\zeta(2s)}=\sum_{m\ge1}\frac{a(m)}{m^s}$ mit $a(m):=\begin{cases}\mu(n), & \text{falls } \exists n: m=n^2,\\ 0, & m \text{ kein } \square.\end{cases}$

Es ist $b=a*v$,

also $b(n)=\sum_{d^2|n}\mu(d)\,v\left(\frac{n}{d^2}\right)$ und $b(p^k)=\begin{cases}v(p^k)-v(p^{k-2}), & \text{für } k\ge2,\\ v(p), & \text{für } k=1.\end{cases}$

Aus L. 20.4 folgt $b(p^k)=0$ für $k\ge4$, sowie $b(2)=0$, $b(4)=-3$, $b(8)=2$, und für $p\ge3$ ist $b(p)=\frac{4}{p-2}$, $b(p^2)=\frac{3p+2}{2-p}$, $b(p^3)=\frac{2p}{p-2}$.

Die Reihen für $\frac{1}{\zeta(2s)}$ und $V(s)$ konvergieren absolut für $\sigma>\frac12$, der Eulersche Π-Satz liefert die Produktentwicklung

$$\frac{V(1)}{\zeta(2)}=\prod_p\left(1+\frac{b(p)}{p}+\frac{b(p^2)}{p^2}+\frac{b(p^3)}{p^3}\right)=\frac12\prod_{p\ge3}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right),$$

der Kehrwert ist

$$\frac{\zeta(2)}{V(1)}=2\prod_{p\ge2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)=:C_2'\neq0.$$ □

20.10. **Def.:** $C_2:=2\prod_{p\ge2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$ heißt Zwillingskonstante (gelegentlich ohne Faktor 2), vgl. a17.9.

20.11. **Satz:** Für $x\to\infty$ gilt $\pi_2(x)\le 8C_2\frac{x}{\log^2(x)}+o\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right)$.

Bew.: $\pi_2(x)-\pi_2(\sqrt{x})\underset{20.3}{\ll} x\cdot\left(\sum_{q\le Q}g(q)\right)^{-1}\underset{20.8}{\le}\frac{4\zeta(2)}{V(1)}\cdot\frac{x}{\log^2(x)}\rightsquigarrow\pi_2(x)\le 8\overbrace{\frac{\zeta(2)}{V(1)}}^{C_2}\cdot\frac{x}{\log^2(x)}$.

$Q=\sqrt{x}/\log(x)$, "≤" bei scharfem großen Siebe □

20.12 **Bem.:** • Damit sind die Kor. 17.12/13 gezeigt.

• Laut der Vermutung von Hardy und Littlewood, $\pi_2(x)\sim C_2\frac{x}{\log^2(x)}$ (vgl. a17.9) gilt aber vermutlich viel mehr.

Unter Ann. der (GRH) haben H&L. dies gezeigt.

• [Heath-Brown, 1983] zeigte: Falls es Siegel-Nst. (vgl. a11.4) gibt, dann ex. ∞ viele PZ-Zwillinge $p, p+2$.

Für den Rest dieses Kapitels gelte: Wir numerieren die Folge der PZen aufsteigend: $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \dots$, d.h. p_n sei die n-te PZ.

20.13. Beh.: Es gilt $p_n \sim n \log(n)$ für $n \to \infty$. ⌐ Ü Blatt 4 Aufgabe 2 ⌙

Vor Kurzem hat sich ein neuer Zugang zur PZ-Zwillingsvermutung eröffnet, der mit dem Studium von PZ-Lücken arbeitet.

20.14. Def.: Die Zahl $d_n := p_{n+1} - p_n$ heißt n-te PZ-Lücke.

20.15 Kleines PZ-Lückenproblem: Wie klein ist die kleinste PZ-Lücke, die ∞ oft vorkommt? (Diese ist 2, falls die PZ-Zwillingsvermutung wahr ist.)
Anders ausgedrückt: Finde eine o.S. für $\liminf_{n\to\infty}(d_n)$.
Erwartungsgemäß ist $d_n \sim \log(p_n)$ mit der plausiblen Ann. $\log(p_{n+1}) \sim \log(p_n)$, denn $(n+1)\log(p_n) - n\log(p_n) = \log(p_n)$ und 20.13.
Lange Zeit war unbekannt, ob $\log(p_n)$ überhaupt unendlich oft unterschritten wird, oder ob gar eine Konstante als o.S. für $\liminf_{n\to\infty}(d_n)$ beweisbar ist.
Dies wurde erst vor kurzem bestätigt und als großer Durchbruch gefeiert.

20.16 Satz von GPY [Goldston, Pintz, Y, Idiram 2007]: $\liminf_{n\to\infty} \frac{d_n}{(\log(p_n))^{1/2}(\log\log(p_n))^2} < \infty$,
insb. ist unendlich oft $d_n < \sqrt{\log(p_n)}(\log\log(p_n))^2 = o(\log(p_n))$.
Dazu wurde eine neue Siebmethode eingeführt, heute bekannt als GPY-Sieb.

20.17. Satz von Zhang, 2013: $\liminf_{n\to\infty}(d_n) \leq 70.000.000$.
Der Beweis erfordert neben dem GPY-Sieb umfangreiche neue Abschätzungen von sog. Kloosterman-Summen, das sind spezielle Exponentialsummen der Form $K(a,b;m) := \sum_{\substack{1\leq x<m \\ (x,m)=1}} e\left(\frac{ax+bx^*}{m}\right)$, wo $xx^* \equiv 1 \ (m)$.

20.18. Satz von Maynard / Tao, 2013: $\liminf_{n\to\infty}(d_n) \leq 600$.
Der Beweis benutzt neben der GPY-Sieb-Idee eine "multidim." Variante des Selberg-Siebs. Der Beweis ist einfacher als der von Zhang und numerisch besser.

20.19. Satz [Polymath 8e, 2013]: $\liminf_{n\to\infty}(d_n) \leq 246$.
Durch Kombination aller verfügbaren Methoden und möglichst genauer effektiver Bestimmung aller vorkommenden Konstanten gelang dieses Gemeinschaftsprojekt.
Dabei entstand auch das folgende Ergebnis:
Satz: $(EH) \Rightarrow \liminf_{n\to\infty}(d_n) \leq 12$, $(GEH) \Rightarrow \liminf_{n\to\infty}(d_n) \leq 6$.
Hier steht (EH) für eine zur (GRH) verwandte Aussage genannt Elliott-Halberstam-Vermutung, und (GEH) für eine plausible Verallgemeinerung davon. Mit den bislang bekannten Methoden sind weitere numerische Verbesserungen ausgeschlossen.

Anhang:
Wir erläutern die Grundidee des GPY-Siebs:

Wir verallgemeinern das Konzept "Primzahlzwilling" $p, p+2h \in \mathbb{P}$ zunächst zu einem "Primzahldetektor", bei dem auch PZ Drillinge, PZ Vierlinge usw. betrachtet werden sollen. Bei Drillingen ist die Konstellation $p, p+2, p+4$ ungünstig, da eine der drei Zahlen stets durch 3 teilbar ist, da $(0,2,4)$ alle Reste mod 3 abdeckt. Eine solche Konstellation, wie geg. durch das Tripel $(0,2,4)$, nennt man unzulässig. Bei Paaren ist $(0,1)$ unzulässig, bei Vierlingen ist z.B. $(0,1,3,6)$ unzulässig, usw.

20.20. Def.: Ein Tupel $\underline{h} \in \mathbb{N}_0^k$ heißt zulässig, falls $\forall p \in \mathbb{P}: \#\{h_i \bmod p;\ 1 \leq i \leq k\} < p$.
Dann erwarten wir, dass unendlich oft Primzahltupel damit erzeugt werden:

20.21. Prim-k-Tupel-Vermutung: Sei $\underline{h} \in \mathbb{N}_0^k$ ein zulässiges k-Tupel. Dann gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so dass $n + \underline{h} := (n+h_1, n+h_2, \ldots, n+h_k) \in \mathbb{P}^k$.
Die Prim-k-Tupel-Vermutung ist auch als Dickson-Hardy-Littlewood-Vermutung (DHL) bekannt.

20.22. Die GPY-Idee besteht nun darin, nachzuweisen, dass für ein zulässiges Tupel unendlich oft irgend zwei der Komponenten von $n+h_j$ PZen sind, wenn $n\to\infty$, etwa durch einen Schubfachschluss.

Dazu sei $\theta(n) := \begin{cases} \log n, & n \text{ prim}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$

für $x>1$ groß setze $S_1(x) := \sum_{x\le n<2x} w(n)$, $S_2(x) := \sum_{x\le n<2x} \left(\sum_{j=1}^{k} \theta(n+h_j)\right) w(n)$.

Die Funktion $w : [x, 2x] \cap \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ wird geschickt gewählt. Lässt sich nun zeigen, dass $S_2(x) > S_1(x)\log(3x)$ für alle $x \ge x_0$, dann folgt für ein $n\in[x,2x[$, dass $\sum_{j=1}^{k}\theta(n+h_j) > \log(3x)$ ist. ⌜Sonst wäre $S_2(x) \le \log(3x) S_1(x)$⌟. Dann müssen (Schubfachschluss!) mindestens zwei der $n+h_j$ Primzahlen sein, welche den Abstand $\le \max_{1\le i\ne j\le k} |h_i - h_j| =: H$ haben. Gilt dies für alle hinreichend großen x, schlägt der "Test" auf PZabstände $\le H$ also unendlich oft an. Auch benachbarte PZpaare haben dann unendlich oft höchstens diesen Abstand.

Dies gelang GPY mit folgender Wahl für w:

$$w(n) := \Big(\sum_{\substack{d\le D\\ d\mid P(n)}} \lambda(d)\Big)^2, \text{ wo } \lambda(d) = \mu(d)\log\left(\frac{D}{d}\right)^{k+l} \text{ mit } l \approx \sqrt{k},$$

$$D = x^{\alpha} \text{ und } P(n) := \prod_{j=1}^{k}(n+h_j).$$

Diese "Gewichtsfunktion" $w(n)$ ist durch das Selberg-Sieb motiviert.

Die Berechnung von $S_2(x)$ ergibt mit diesem $w(n)$ den Ausdruck

$$S_2(x) = \sum_{d_1,d_2\le D} \lambda(d_1)\lambda(d_2) \sum_{\substack{n,\ x\le n<2x\\ \operatorname{ggV}(d_1,d_2)\mid P(n)}} \sum_{j\le k} \theta(n+h_j).$$

Die Bedingung $\operatorname{kgV}(d_1,d_2) \mid (n+h_1)\cdots(n+h_k)$ so, dass $n+h_1,\dots,n+h_k \in \mathbb{P}$, zeigt, dass laut Chinesischem Restsatz PZen in bestimmten Restklassen mod $\operatorname{kgV}(d_1,d_2)$ gezählt werden müssen. GPY haben gezeigt, dass dies zur Lösung des kleinen PZlückenproblems führt.

20.23. <u>Verbesserung von Maynard/Tao des GPY-Siebs:</u>
Ändere w ab in $w(n) = \left(\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \le D \\ d_i \mid n+h_i,\, \forall i}} \mu(d_1\cdots d_k)\, G\left(\log\left(\frac{D}{d_1\cdots d_k}\right)\right)\right)^2$,

G geeignet.

Diese Gewichtsfunktion kann als die einer mehrdimensionalen Variante des Selberg-Siebs gedeutet werden, bei der die Bedingung $d_i \mid n+h_i$ individuell für jedes i angesetzt wird. Dies ermöglicht mehr Freiraum in der Methodik und führt somit zu numerischen Verbesserungen.

20.24 Eng verwandt mit dem kleinen Primzahllückenproblem ist das <u>Große Primzahllückenproblem:</u> Zeige dass von $d_n = p_{n+1} - p_n$ die Größe $\log(p_n)$ unendlich oft deutlich überschritten wird.
In folgender Form konnten Erdős und Rankin dies 1938 beweisen:

20.25 <u>Satz von Erdős-Rankin:</u> Es gibt ein $C>0$, so dass für unendl. viele n gilt:

$$d_n \geq C \log(p_n) \cdot \underbrace{\frac{\log\log(p_n)}{(\log\log\log(p_n))^2} \cdot \log\log\log\log(p_n)}_{\text{div. für } n\to\infty}$$

Erdős hielt eine Verbesserung dieses Satzes seinerzeit für ein schwieriges und herausforderndes Problem. Er vermutete, dass die Konstante $C>0$ zu einer divergenten Funktion verbessert werden können müsste. Bis 2014 werden hingegen nur numerische Verbesserungen der Konstanten $C>0$ erreicht (etwa 1963 von Rankin, der $C = e^{\sigma}$ zeigte).

Erdős war bekannt dafür, für bestimmte Probleme, die unlösbar erschienen, (kleinere) Geldpreise auszusetzen. Das Erdős-Rankin-Problem hatte er mit der höchsten Summe von 10.000 $ ausgelobt.

Im Jahr 2014 gab Maynard auf arxiv.org eine Lösung bekannt, und ebenso in derselben Woche die Mathematiker Ford, Konyagin, Green und Tao.
Inzwischen ist die folgende, bislang beste Version, bekannt, die mit den aktuellen Methoden wohl kaum weiter verbessert werden kann:

2026. Satz von Maynard-Ford-Konyagin-Green-Tao (2018): Es ex. $C>0$, so dass für unendlich viele n gilt: $d_n \geq C \cdot \log(n) \cdot \frac{\log\log(n)\,\log\log\log\log(n)}{\log\log\log(n)}$.

Der Exponent 2 hier ist getilgt!
Die Methoden/Verbesserungen stammen aus den Durchbrüchen im kleinen Primzahlensatz, d.h. die mehrdim. Selberg-Siebe-Gewichte in 2023 spielen darin eine wesentliche Rolle.