Vorlesung Zahlentheorie II (Analytische ZT)

SoSe '23, hhu
K. Halupczok

a2: Primzahlzählfunktionen und PZS

Stichworte: Primzahlzählfunktionen π, ϑ, ψ, Satz von Tschebyschev, Primzahlsatz, Riemannsche Vermutung, Zusammenhang zwischen ζ und Λ bzw. ψ

2.1. Einleitung: Wir behandeln die drei gängigen Primzahlzählfunktionen π, ϑ, ψ (und kurz ihre Verallgemeinerungen auf eine arithmetische Progression $a \bmod q$).

2.2. Def.: Sei $x>1$ reell. Def. $\pi(x) := \#\{p \le x;\ p \in \mathbb{P}\} = \sum_{p \le x} 1$.
Seien $q, a \in \mathbb{Z}$, $q \ge 1$. Def. $\pi(x; q, a) := \#\{p \le x;\ p \in \mathbb{P},\ p \equiv a\ (q)\}$
$$= \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a\ (q)}} 1.$$

Mit "Primzahlzählfunktion" ist meist $\pi(x)$ bzw. $\pi(x; q, a)$ gemeint. Es gibt noch die folgenden (gewichteten) Varianten, die technisch leichter handzuhaben sind:

2.3. Def.: Sei $x>1$ reell. Def. $\vartheta(x) := \sum_{p \le x} \log(p)$
Seien $q, a \in \mathbb{Z}$, $q \ge 1$. Def. $\vartheta(x; q, a) := \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a\ (q)}} \log(p)$.

2.4. Def.: Die von-Mangoldt-Funktion Λ ist def. als
$\Lambda(n) = \log(p)$, falls n eine Primpotenz (zu einer PZ p) ist, d.h.
$$\exists\, p \in \mathbb{P}\ \exists\, k \in \mathbb{N} : n = p^k,$$
und $\Lambda(n) = 0$, sonst.

2.5. Bem.: Haben $\sum_{d \mid n} \Lambda(d) = \log(n)$, da für $n \overset{\text{PFZ}}{=} p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ gilt: l.S. $= \sum_{i=1}^{r} \sum_{\beta_i \le \alpha_i} \log(p_i) = \sum_{i=1}^{r} \log(p_i^{\alpha_i}) = \log(n)$.

2.6. Def.: Sei $x>1$ reell. Def. $\psi(x) := \sum_{p^k \le x} \log(p) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$.
Seien $q, a \in \mathbb{Z}$, $q \ge 1$. Def. $\psi(x; q, a) := \sum_{\substack{p^k \le x \\ p^k \equiv a\ (q)}} \log(p) = \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv a\ (q)}} \Lambda(n)$.

2.7. **Bezeichnungen:** Man nennt ϑ die 1. Tschebyschev-Funktion, und ψ die 2. Tsch.-Fkt.
↖ kurz: "Tsch.-fkt."

2.8. **Trivial:** $\pi(x) \le x$, $\vartheta(x) \le x\log(x)$, $\psi(x) \le x\log(x)$,
$\pi(x;q,a) \le \lceil \frac{x}{q} \rceil$, $\vartheta(x;q,a) \le \lceil \frac{x}{q} \rceil \log(x)$, $\psi(x;q,a) \le \lceil \frac{x}{q} \rceil \log(x)$.

2.9. **Bem.:** a) $\pi(x;1,a) = \pi(x)$, ebenso für ϑ und ψ

b) ϑ und ψ unterscheiden sich wenig voneinander:
$\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x})$, (bzw. $O(\sqrt{x}\log x)$ ohne Tsch.)

c) $\psi(x;q,a) = \vartheta(x;q,a) + O(\sqrt{x})$, nicht triv. für $\varphi(q) = o(\sqrt{x})$.

Bew.: a): ✓, b): $\psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{\substack{p^k \le x \\ k \ge 2}} \log(p) = \sum_{p \le \sqrt{x}} \log(p) \sum_{2 \le k \le \frac{\log(x)}{\log(p)}} 1$

$$\le \sum_{p \le \sqrt{x}} \log(p) \cdot \frac{x}{\log p} = \pi(\sqrt{x}) \log(x) \underset{\text{Tsch., s.u.}}{\ll} \sqrt{x}.$$

Wird im letzten Schritt die triviale Absch. $\pi(\sqrt{x}) \le \sqrt{x}$ verwendet, erhält man $\psi(x) - \vartheta(x) \ll \sqrt{x}\log(x)$, was meistens schon ausreicht.

c): analog: $\psi(x;q,a) - \vartheta(x;q,a) \le \sum_{p \le \sqrt{x}} \log(p) \sum_{k \le \frac{\log(x)}{\log(p)}} 1 \ll \sqrt{x}$.
(bzw. $\sqrt{x}\log(x)$ ohne Tsch.)

Trivial: $\vartheta(x;q,a) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a (q)}} \log(p) \ll \frac{x}{q}\log(x)$, ebenso für $\psi(x;q,a)$

Auch: $\gg \frac{x}{\varphi(q)}$ → Für $\varphi(q) \ge \sqrt{x}$ ist Fehlerterm $O(\sqrt{x})$ größer als Hauptterm. □

laut späterem PZS in APs

2.10. **Satz (von Tschebyschev):** (← hier oft auch "Tsch." abgekürzt)

(a) $\exists C_1 < C_2$: $\forall x \ge 2$: $C_1 \frac{x}{\log(x)} \le \pi(x) \le C_2 \frac{x}{\log(x)}$ $\iff$ $\frac{x}{\log(x)} \ll \pi(x) \ll \frac{x}{\log(x)}$

(b) $\exists C_3 < C_4$: $\forall x \ge 2$: $C_3 x \le \psi(x) \le C_4 x$ $\iff$ $x \ll \psi(x) \ll x$

(c) $\exists C_5 < C_6$: $\forall x \ge 2$: $C_5 x \le \vartheta(x) \le C_6 x$ $\iff$ $x \ll \vartheta(x) \ll x$

Bew.: * Alle drei Aussagen sind äquivalent: (b)⇔(c) klar wegen 2.9. b) in der Form $\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}\log x)$, (a)⇒(c) klar wegen $\vartheta(x) = \sum_{p \le x} 1 \cdot \log p \overset{P.S.}{=} \pi(x)\cdot\log x - \int_2^x \pi(t)\frac{dt}{t}$,

$\int_2^x \frac{dt}{\log t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log t} \ll \sqrt{x} + \frac{x}{\log x}$

und $\int_2^x \frac{dt}{\log t} \ll \frac{x}{\log x}$, (c)⇒(a) wegen $\pi(x) = \sum_{p \le x} \frac{\log p}{\log p} \underset{P.S.}{=} \vartheta(x)\cdot\frac{1}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}dt$,

und $\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{(\log t)^2} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{(\log t)^2} \le \sqrt{x} + x\cdot\frac{1}{(\log\sqrt{x})^2} \ll \frac{x}{(\log x)^2}$.

$\pi(x) \begin{cases} \ge \frac{\vartheta(x)}{\log x} & ✓ \\ \ll \frac{\vartheta(x)}{\log x} & ✓ \end{cases}$

* Zeigten in Ant 11 noch $\vartheta(x) \le x\log(4)$, $\psi(x) \ge \frac{x}{\log(4)}$, genügt. □

2.11. Kor.: Bertrands Postulat: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann $\exists p: \; n < p \leq 2n$.

Bew.: OK für $n \leq \tilde{x}_0$ ✓, ansonsten: $\sum_{n<p\leq 2n} \log(p) = \vartheta(2n) - \vartheta(n) > n\Big(\underbrace{\tfrac{2}{\log(4)} - \log(4)}_{\approx 0.056 > 0}\Big)$. ✓ □

$\tilde{x}_0$ explizit berechenbar

2.12. Bekannte numerische Schranken [Rosser & Schoenfeld, 1975] für ϑ, π, ψ:

$$\vartheta(x) < 1.000081\, x, \quad x > 0$$

$$\vartheta(x) > 0.75\, x, \quad x \geq 36$$

$$\frac{1}{\log x} \leq \pi(x) \leq \frac{1.25506\, x}{\log(x)}, \quad \text{u.S.: } x \geq 17, \text{ o.S.: } x > 1$$

$$|\vartheta(x) - x| < \frac{8.686\, x}{\log^2(x)}, \quad x > 1$$

ebenso für ψ

Effektive Absch. für $\psi(x; q, a)$, $\vartheta(x; q, a)$, $\pi(x; q, a)$:

2.13. Satz von Dusart (2001):

Für $x > x_0(q)$, mit $x_0(q)$ effektiv berechenbar, gilt

$$\left|\psi(x; q, a) - \frac{x}{\varphi(q)}\right| < x \cdot \varepsilon(x), \quad \text{wo } \varepsilon(x) = \sqrt[4]{\frac{q^2 \log(x)}{R\, \varphi(q)^2}} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\log(x)}{R}}\right), \quad R \approx 9.646$$

ebenso für ϑ.

2.14. Bsp.: $\pi(x; 3, a) < \dfrac{0.55\, x}{\log(x)}, \quad x \geq 229\,869.$

$$\left|\theta(x; 3, a) - \frac{x}{2}\right| < \frac{0.262\, x}{\log x}, \quad x \geq 1531.$$

2.15. Eine Vermutung von Gauß (1849) besagte: $\pi(x) \sim li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$ (li heißt logarithmisches Integral) und ist heute bewiesen und bekannt als

"Primzahlsatz"

PZS (1896, Hadamard / de la Vallée-Poussin): $\boxed{\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log(x)}.}$

2.16. Bem.: • Jeder analytische Beweis des PZSes benutzt die trigonometrische Unglg.

$$3 + 4\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) \geq 0 \quad \text{denn: l.S.} = 2(1 + \cos\alpha)^2.$$

• Wegen 2.9.b) sind auch $\vartheta(x) \sim x$ und $\psi(x) \sim x$ zum PZS äquivalent.

2.17. Die beiden in 2.15 genannten PZS-Versionen sind äquivalent, weil $li(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ gilt:

Haben $li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \int_2^x \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{\log t}}_{v} \cdot dt \overset{p.I.}{=} \frac{t}{\log t}\Big|_2^x + \int_2^x \frac{t}{t\log^2 t}\,dt = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} + O(1)$

mit $\int_2^x \frac{dt}{\log^2(t)} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log^2(t)} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log^2(t)} = O(\sqrt{x}) + O\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right) = O\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right)$,

so dass $li(x) = \frac{x}{\log(x)} + O\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right)$ folgt. Weiter: $li(x) = \frac{x}{\log(x)} + \frac{x}{\log^2(x)} + O\left(\frac{x}{\log^3(x)}\right)$, ...
Mit $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ folgt dann auch $\pi(x) \sim li(x)$. (vgl. Anz 12.5)

2.18. Die <u>bessere Approximation</u> liefert die Version: $\boxed{\pi(x) \sim li(x)}$,
<u>numerische Daten</u> zeigen dies deutlich. Die Version $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ kann wegen $\frac{x}{\log(x)} = li(x) + O\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right)$ daher nur auf die Approximation $\pi(x) = \frac{x}{\log(x)} + O\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right)$ gebracht werden, eine weitere Verschärfung des Fehlerterm $O\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right)$ ist nicht möglich.
Wie gut hingegen die Approximation $\pi(x) \sim li(x)$ ist,
ist eines der wichtigsten zentralen ungelösten Probleme der Mathematik:

2.19. <u>Riemannsche Vermutung</u> $\Leftrightarrow$ $\pi(x) - li(x) = O(\sqrt{x}\log(x))$.
Genauer: 1) $(RH) \Rightarrow \pi(x) = li(x) + O(\sqrt{x}\log(x))$, 2) $\forall \varepsilon > 0: \pi(x) = li(x) + O(x^{1/2+\varepsilon}) \Rightarrow (RH)$.
Wir werden noch sehen, dass die (RH) die folgende analytische Formulierung hat:
"Jede nichttriviale Nullstelle von ζ im Streifen $0 \le \sigma \le 1$ hat den Realteil $\frac{1}{2}$."
Dass ζ etwas mit Primzahlen zu tun hat, ist bereits an der Formel $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n \ge 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ zu sehen.

2.20. Das bis heute beste Ergebnis zum Fehlerterm im PZS lautet:
<u>PZS mit Restglied</u> (nach <u>Vinogradov/Korobov 1958</u>):

$$\pi(x) = li(x) + O\left(\frac{x}{\exp(c_1 (\log x)^{3/5} (\log\log x)^{-1/5})}\right) \text{ für eine Konstante } 0 < c_1 < 1.$$

2.21. Mit nicht allzu komplizierten Mitteln werden wir bereits das Fehlerglied $O\left(\frac{x}{\exp(c_2\sqrt{\log x})}\right)$ beweisen, was wir als <u>"1. Version"</u> des PZSes mit Restglied bezeichnen. Darüberhinaus zeigen wir auf, wie sich die <u>"2. Version"</u>, nämlich die Vinogradov/Korobov-Version zeigen lässt (voraussichtlich nicht in allen Details).