Vorlesung Zahlentheorie II (Analytische ZT)

SoSe '23, hhu
K. Halupczok

a15: Die Dedekindsche ζ-Funktion

Stichworte: Zählfunktion der Ideale von Norm n, Dedekindsche ζ-Fkt. von K, Formel für hk mit ζ_K, Eulerproduktdarstellung von ζ_K, Charakter χ eines quadratischen ZKs, Formel $hk = L(1,\chi)$ im Fall eines quadratischen ZKs

---

15.1. Einleitung: Damit wir analytische Methoden in Fragestellungen zur Klassenzahl einsetzen können, definieren wir die Dedekindsche ζ-Funktion ζ_K mit der Zählfunktion der Ideale von Norm n, welche aufgrund der in a14 gezeigten Asymptotiken (absolut) konvergiert. Die Entwicklung in ein Eulerprodukt zeigt im Fall des quadratischen ZKs K, dass $\zeta_K(s) = \zeta(s)\cdot L(s,\chi)$ ist, wo χ der Charakter von K ist.
Um $i(\lambda)$ besser zu verstehen, betr. wir die Zählfkt. der Ideale mit Norm n.

15.2. Def.: Sei K ein ZK mit ZR A. Für $n \geq 1$ sei
$$j_n := \#\{\mathfrak{a} \subseteq A;\ \mathfrak{a} \text{ Ideal}, N(\mathfrak{a}) = n\}.$$
Für $\operatorname{Re} s > 1$ setze $\zeta_K(s) := L(K,s) := \sum_{n\geq 1} \frac{j_n}{n^s}$.
Erinnerung: Die Norm $N(\mathfrak{a})$ war def. als
$$N(\mathfrak{a}) := \#A/\mathfrak{a}.$$
Die Fkt. ζ_K heißt Dedekindsche ζ-Fkt. von K.

15.3. Bem.: (1) Es ist $\sum_{n\leq\lambda} j_n = O(\lambda)$ nach 14.3. Es folgt Konvergenz für $\operatorname{Re} s > 1$.
(2) Es ist $j_n = \sum_{\substack{\mathfrak{a},\\ N(\mathfrak{a})=n}} 1$, also $\zeta_K(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\subseteq A\\ \text{Ideal}\neq 0}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$ für $\operatorname{Re} s > 1$.
(3) $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$.
(4) Sei $h = \#\mathcal{C}(K)$ die Klassenzahl von K, κ der Koeffizient von Satz 14.3, d.h. $i(\lambda) = h\kappa\lambda + O(\lambda^{1-1/m})$. Schreiben $\zeta_K(s) = \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{j_n - h\kappa}{n^s}}_{=:f(s)} + h\kappa\zeta(s)$, für $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Wegen $\sum_{n\leq\lambda} (j_n - h\kappa) = \kappa h\lambda + O(\lambda^{1-1/m}) - h\kappa\lfloor\lambda\rfloor = O(\lambda^{1-1/m})$ konvergiert $f(s)$ für $\operatorname{Re}(s) > 1-\frac{1}{m}$. Es folgt:

15.4 **Satz:** Es ist $h_K = \lim\limits_{\substack{s \downarrow 1 \\ (s \text{ reell})}} \frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)} = \lim\limits_{\substack{s \downarrow 1 \\ (s \text{ reell})}} (s-1)\zeta_K(s)$.

⌈Denn: $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \cdot g(s)$ mit $g(1) = 1$.⌋

15.5 **Bem.:** • Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ ist eindeutig Produkt von Primidealen $\mathfrak{p} \neq 0$ von A, d.h. $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$. Somit ist $N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{p}_1)^{e_1} \cdots N(\mathfrak{p}_r)^{e_r}$.
Dies ergibt (laut Eulerproduktsatz Anz 8.15(ii)) die folgende Darstellung von ζ_K als Eulerprodukt: $\zeta_K(s) = \sum\limits_{\substack{\mathfrak{a} \neq 0 \\ \text{Ideal}}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod\limits_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}}$ für $\operatorname{Re} s > 1$,
wo $\mathcal{P} := \{\mathfrak{p} \subseteq A;\ \mathfrak{p} \text{ Ideal}, \mathfrak{p} \text{ prim}\}$.
• Behandeln Fall $n = 2$ jetzt genauer.

15.6 **Vor.:** Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, wo $d \in \mathbb{Z}$, $\mu^2(d) = 1$, $d \neq 1$, dann ist $D := \operatorname{dis}(K) = \begin{cases} d, & d \equiv 1\ (4), \\ 4d, & d \equiv 2,3\ (4). \end{cases}$

15.7 **Lemma:** Es gibt einen (Dirichletschen) Zahlcharakter χ mod D, der sogenannte Charakter von K, mit: $\forall p \in \mathbb{P}$ gilt:
$$A_p = \begin{cases} \mathfrak{p}^2 \Leftrightarrow \chi(p) = 0, \\ \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2\ (\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}') \Leftrightarrow \chi(p) = 1, \\ \text{prim} \Leftrightarrow \chi(p) = -1. \end{cases}$$

Beweisskizze: • Sei $p > 2$. Dann: $A_p = \begin{cases} \mathfrak{p}^2 \Leftrightarrow p \mid d, \\ \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \Leftrightarrow p \nmid d \wedge \left(\frac{d}{p}\right) = 1, \\ \text{prim} \Leftrightarrow p \nmid d \wedge \left(\frac{d}{p}\right) = -1. \end{cases}$
(vgl. Z13.2 aus ZT I)
Mit dem QRG folgt, dass der Zerlegungstyp von A_p nur von der Restklasse von p mod $|D|$ abhängt. Genauer: Sei $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert durch
(i) $(a, D) \neq 1 : \chi(a) := 0$, (ii) $(a, D) = 1 : \chi(a) := \begin{cases} \left(\frac{a}{|d|}\right), & \text{falls } d \equiv 1\ (4), \\ (-1)^{(a-1)/2} \left(\frac{a}{|d|}\right), & \text{falls } d \equiv 3\ (4), \\ (-1)^{(a^2-1)/8 + \frac{a-1}{2} \cdot \frac{d'-1}{2}} \left(\frac{a}{|d|}\right), & \text{falls } d \equiv 2\ (4), \end{cases}$ $2d' = d$.

χ ist dann ein Charakter mod D. Denn betr. etwa den Fall $d \equiv 1\ (4)$, $p > 2$, dann ist $D = d$ und $A_p = \begin{cases} \mathfrak{p}^2 \Leftrightarrow p \mid d \Leftrightarrow \chi(p) = 0, \\ \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \Leftrightarrow \left(\frac{d}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{|d|}\right) \overset{!}{=} \left(\frac{p}{d}\right) = 1, \\ \text{prim} \Leftrightarrow \left(\frac{d}{p}\right) = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{|d|}\right) = -1. \end{cases}$ ⌈"!": $d = -|d| \Rightarrow \left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{|d|}{p}\right)$⌋

• Ist $p = 2$, so gilt
$A \cdot 2 = \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_2' \Leftrightarrow |d| \equiv 1\ (8) \Leftrightarrow d \equiv 1, 7\ (8) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{d}\right) = 1$ nach dem 2. EG. □

15.8. Folgerung (ζ_K für quadratische ZK): Es ist nach 15.5 also

$$\zeta_K(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \prod_{\mathfrak{p}|p} \frac{1}{1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}}, \text{ also}$$

$$\prod_{\mathfrak{p}|p} \frac{1}{1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}} = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-1/p^s}\right)^2, & \chi(p)=1, \\ \frac{1}{1-1/p^{2s}}, & \chi(p)=-1, \\ \frac{1}{1-1/p^s}, & \chi(p)=0, \end{cases} \quad \text{für } \mathrm{Re}(s)>1.$$

Es folgt für $\mathrm{Re}(s)>1$:

$$\zeta_K(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} = \zeta(s)\cdot \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}.$$

Somit:

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)\cdot L(s,\chi).$$

15.9. Kor.: Es ist $h_K = L(1,\chi)$. ⌜Denn $h_K = \lim_{s\searrow 1} \frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)}$ nach 15.4.⌟

Zusammen mit Gaußsummen-Betrachtungen zu $L(1,\chi)$, s. a12/13, führt dies zur Klassenzahlformel für quadratische ZK in a16.