Vorlesung Zahlentheorie II (Analytische ZT)

SoSe '23, hhu
K. Halupczok

a14: Verteilung der Ideale in Zahlringen

Stichworte: Zählfunktion der Ideale mit Norm $\leq \lambda$ in einer Idealklasse eines ZKs, asymptotische Formel $\sim \kappa \cdot \lambda$, Berechnung von κ im Fall eines quadratischen ZKs

---

14.1. Einleitung: Wir zeigen für die Anzahl der ganzen Ideale einer Idealklasse mit Norm $\leq \lambda$ eine asymptotische Formel der Form $\kappa\lambda + O(\lambda^{1-1/n})$, wobei im Fall $n=2$ die Konstante κ genau in Abhängigkeit der Diskriminante (und der Grundeinheit u für $K \subseteq \mathbb{R}$) berechnet werden kann.

14.2. Voraussetzung: Sei K ein ZK vom Grad n mit Zahlring A, $C \in \mathcal{C}(K)$.
Für $\lambda \geq 0$ sei $i(\lambda) := \#\{\mathfrak{a} \subseteq A;\ \mathfrak{a} \text{ Ideal},\ N(\mathfrak{a}) \leq \lambda\}$,
sowie $i_C(\lambda) := \#\{\mathfrak{a} \subseteq A;\ \mathfrak{a} \text{ Ideal},\ \mathfrak{a} \in C,\ N(\mathfrak{a}) \leq \lambda\}$.
Es ist $i(\lambda) = \sum_{C \in \mathcal{C}(K)} i_C(\lambda)$.

14.3. Satz: Es gibt ein $\kappa \geq 0$ so, dass für alle $C \in \mathcal{C}(K)$ gilt:
$$i_C(\lambda) = \kappa\lambda + \varepsilon_C(\lambda) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_C(\lambda) = O(\lambda^{1-1/n}) \qquad (\text{für } \lambda \to \infty).$$

Im Fall $n=2$ (quadratisches ZK) gilt:
(i) $\kappa = \dfrac{2\pi}{\#(A^\times)\cdot\sqrt{|\mathrm{disc}(K)|}}$, falls $\mathrm{disc}(K) < 0$, d.h. wenn K imaginär-quadr.
(ii) $\kappa = \dfrac{2\log(u)}{\sqrt{\mathrm{disc}(K)}}$, falls $\mathrm{disc}(K) > 0$, und $u > 1$ die Grundeinheit, d.h. wenn K reellquadratisch.

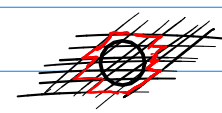
Bew.: (nur $n=2$)
Sei $\mathfrak{b} \in C^{-1}$ ein ganzes Ideal. Haben Bijektionen
$$\{\mathfrak{a} \in C;\ N(\mathfrak{a}) \leq \lambda\} \longleftrightarrow \{(x);\ 0 \neq x \in \mathfrak{b};\ N((x)) \leq \lambda N(\mathfrak{b})\} =: \mathcal{H}$$
vermöge
$$\mathfrak{a} \longmapsto \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$$
und
$$(x)\cdot\mathfrak{b}^{-1} \longleftarrow\!\shortmid (x).$$
[Denn: $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = (x)$, und $N(\mathfrak{a})\cdot N(\mathfrak{b}) = N((x)) \leq \lambda N(\mathfrak{b})$.]
Zählen nun die Elemente rechts in $\mathcal{H}$.

(i): Sei K imaginär quadratisch. Dann ist $U := A^\times$ endlich und $i_c(\lambda) = \frac{1}{\#U} \cdot \#\{x \in \mathfrak{o} \setminus \{0\};\ |N(x)| \le \lambda N(\mathfrak{o})\}$.

⌜Denn: $(x) = (y) \Leftrightarrow x, y$ in derselben U-Bahn von $U \times (\mathfrak{o} \setminus \{0\}) \to (\mathfrak{o} \setminus \{0\})$, $(u, x) \mapsto ux$. ⌟

Sei $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x \mapsto x = (\operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x)$ die kanonische Einbettung.
Es ist $N(x) = |x|^2$, und $\mathfrak{o} = \sigma\mathfrak{o}$ ist ein Gitter in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit
$\gamma := \operatorname{vol}(\mathbb{R}^2/\mathfrak{o}) = \frac{1}{2}\sqrt{|\operatorname{disc}(K)|} \cdot N(\mathfrak{o})$ nach Z16.12 aus ZT I.
Für $\varrho \ge 0$ sei $S(\varrho) := \{x \in \mathbb{C};\ |x| \le \varrho\}$, G eine Grundmasche des Gitters $\mathfrak{o}$ und δ die Länge der langen Diagonalen von G.
Sei nun $n(\varrho) := \#\{x \in \mathfrak{o};\ |x| \le \varrho\}$,
$n_-(\varrho) := \#\{x \in \mathfrak{o};\ (x + G) \subseteq S(\varrho)\}$
$n_+(\varrho) := \#\{x \in \mathfrak{o};\ (x + G) \cap S(\varrho) \ne \emptyset\}$.

Es gilt $n_-(\varrho) \le n(\varrho) \le n_+(\varrho)$ und
$$\pi(\varrho - \delta)^2 \le n_-(\varrho) \cdot \gamma \le \pi\varrho^2 \le n_+(\varrho)\gamma \le \pi(\varrho + \delta)^2.$$



Sei nun $\varrho := \sqrt{\lambda N(\mathfrak{o})}$. Dann folgt:
$$-2\pi\varrho\delta + \pi\delta^2 \le n_-(\varrho) \cdot \gamma - \pi\varrho^2 \le n(\varrho)\gamma - \pi\varrho^2 \le n_+(\varrho)\gamma - \pi\varrho^2 \le 2\pi\varrho\delta + \pi\delta^2,$$
also $\left| n(\varrho) - \frac{\pi\varrho^2}{\gamma} \right| \le \frac{2\pi\varrho\delta + \pi\delta^2}{\gamma}$ $(= O(\lambda^{1/2}))$,
somit:
$$n(\sqrt{\lambda N(\mathfrak{o})}) = \frac{\pi\lambda}{\gamma} N(\mathfrak{o}) + O(\lambda^{1/2}) = \frac{2\pi\lambda}{\sqrt{|\operatorname{disc}(K)|}} + O(\lambda^{1/2}).$$
Daher: $i_c(\lambda) = \frac{2\pi}{(\#A^\times) \cdot \sqrt{|\operatorname{disc}(K)|}} \lambda + O(\lambda^{1/2})$.

(ii): Sei K reellquadratisch. Dann ist $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ mit $m > 1$ und $A^\times = \{\pm 1\} \times U$, wo $U = \langle u \rangle$ unendl. zyklisch, $u > 1$ die Grundeinheit.
Nun operiert U auf $\mathfrak{o} \setminus \{0\}$ vermöge Multiplikation, d.h. mit
$$U \times (\mathfrak{o} \setminus \{0\}) \to \mathfrak{o} \setminus \{0\},\ (u, x) \mapsto ux.$$
Ist nun $Y \subseteq (\mathfrak{o} \setminus \{0\})$ ein Repräsentantensystem für die U-Bahnen, so gilt: $i_c(\lambda) = \frac{1}{2} \#\{x \in Y;\ |N(x)| \le \lambda N(\mathfrak{o})\}$.
↑ für $\{\pm 1\}$

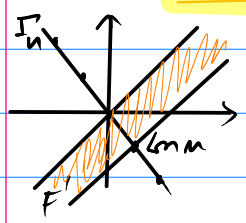
Haben die kanonische Einbettung $\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $x \mapsto (\sigma_1 x, \sigma_2 x)$, betr. die Abb.

$$\mathrm{Ln}: (A\setminus\{0\}) \subseteq K^\times \xrightarrow{\sigma|_{K^\times}} \mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}^\times \xrightarrow{\ln} \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$
$$x \longmapsto (\sigma_1 x, \sigma_2 x) \longmapsto (\log|\sigma_1 x|, \log|\sigma_2 x|).$$

Dann ist $\mathrm{Ln}|_U$ ein Isomorphismus von U auf ein Gitter Γ_U mit $\Gamma_U \subseteq H := \{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}\oplus\mathbb{R};\ y_1+y_2=0\}$.

Denn: $A^\times \xrightarrow{\mathrm{Ln}} \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ hat Kern $\{\pm 1\}$, und $\mathrm{Ln}(U^\times) = \Gamma_U \subseteq \{\sum x_i + 2\sum y_i = 0\}$ ⌜$1 = \prod|x_i|\prod|y_i|^2$⌟

Es ist $\Gamma_U := \mathbb{Z}\cdot\mathrm{Ln}(u)$,



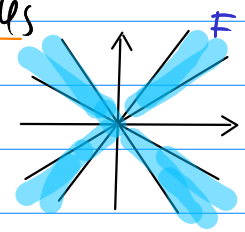
wo $\mathrm{Ln}(u) = (\log(u), -\log(u))$.

Sei $F' := \{a(1,1) + b\,\mathrm{Ln}\,u;\ a\in\mathbb{R},\ 0\le b<1\}$, dies ist ein Repräsentantensystem für $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}/\Gamma_U$. Mit Lemma 14.4 ist $F := (\mathrm{Ln})^{-1}(F')$ ein Repräsentantensystem für $\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}^\times/\sigma U$, also $F := \{(\pm e^a u^b, \pm e^a (\frac{1}{u})^b);\ a\in\mathbb{R}, 0\le b<1\}$.

F heißt Fundamentalbereich von K. Sei nun $X := \sigma(\mathfrak{o}\setminus\{0\})\cap F$, dann ist X ein Repräsentantensystem für die $\sigma(U)$-Bahnen, in die $\sigma(\mathfrak{o}\setminus\{0\})$ zerfällt. Also: $i_C(\lambda) = \frac{1}{2} n(\lambda\cdot N(\mathfrak{o}))$,

wobei für $\rho>0$ dann $n(\rho)$ zu setzen ist als

$n(\rho) := \#\{(x_1,x_2)\in X;\ |x_1|\cdot|x_2|\le\rho\} = \#$ Punkte $(x_1,x_2)\neq(0,0)$ des Gitters $\sigma\mathfrak{o}$ mit $(x_1,x_2)\in F$ und $|x_1|\cdot|x_2|\le\rho$.

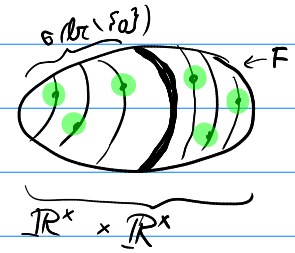


Sei $v(\rho) := \mu(F\cap\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_{\ge0}\times\mathbb{R}_{\ge0};\ x_1x_2\le\rho\})$.

Ähnlich wie in (i) folgt: $n(\rho) = \underbrace{4}_{\#\text{Quadranten}}\cdot\frac{v(\rho)}{\sigma} + O(\sqrt{\rho})$,

wobei $\sigma = \mathrm{vol}(\mathbb{R}^2/\sigma\mathfrak{o}) = \sqrt{\mathrm{disc}(K)}\cdot N(\mathfrak{o})$. Die Dreiecke $\Delta(0,\sqrt{\rho},(\sqrt{\rho},\sqrt{\rho}))$ und $\Delta(0,\sqrt{\rho}u,(\sqrt{\rho}u,\sqrt{\rho}\frac{1}{u}))$ haben dieselbe Fläche, es folgt:

$$v(\rho) = \int_{\sqrt{\rho}}^{\sqrt{\rho}u} \frac{\rho}{x}\,dx = \rho(\log(\sqrt{\rho}\,u) - \log(\sqrt{\rho})) = \rho\log(u).$$



Somit ist $i_C(\lambda) = \frac{2\log(u)}{\sqrt{\mathrm{disc}(K)}}\cdot\lambda + O(\lambda^{1/2})$. □

14.4. Lemma: Sei $f: G\to G'$ Hom. abelscher Gruppen, $H\le G$ UG mit $H\cap\ker(f)=\{e\}$. Sei $X'\subseteq G'$ ein Repräsentantensystem für $G'/f(H)$. Dann ist $X = f^{-1}(X')$ ein Repräsentantensystem für G/H. ⌜o. Bew.⌟