Vorlesung Zahlentheorie II (Analytische ZT)

SoSe '23, hhu
K. Halupczok

a11: Siegelnullstellen

Stichworte: Siegelnullstellen, Satz von Siegel-Walfisz, β-Term in expliziten Formeln

---

11.1. Einleitung: Aus $L(1,\chi)\neq 0$ bzw. dem Satz von Siegel folgt lediglich die Existenz einer Umgebung U von $s=1$ mit $L(s,\chi)\neq 0$ für $s\in U$. Über die Größe von U ist so nichts bekannt, insb. nicht über ihre Größe in Abh. von q. Dieser Mangel wird zunächst behoben. Danach untersuchen wir Siegel-Nullstellen bzw. Ausnahme-/exzeptionelle Nullstellen, deren potentielle Existenz bis heute nicht ausgeschlossen werden kann. Immerhin können wir zeigen, dass ihr Auftreten sehr selten ist. Damit können wir den besten PZS in APs zeigen, der eine Kontrolle über die q-Abhängigkeit des Fehlerterms zulässt: den Satz von (Page-) Siegel-Walfisz 11.6.

11.2. Satz: Sei $q\in\mathbb{N}$, χ ein Charakter mod q. Dann gibt es eine absolute Konstante $c_0>0$, so dass im Gebiet $|t|<1$ und $\sigma>1-\frac{c_0}{\log(q)}$ höchstens eine Nullstelle von $L(s,\chi)$ liegt, die im Falle ihrer Existenz notwendig reell und einfach ist.

11.3. Bew.: Wir zeigen dafür, dass $c_0>0$ ex. so, dass für $q\geq q_0$ die Fkt. $L(s,\chi)$ im Gebiet $\mathcal{G}=\{s=\sigma+it;\ \sigma>1-\frac{c_0}{\log(q)},\ |t|<\frac{c_0}{2\log(q)}\}$ höchstens eine Nullstelle besitzt. [Rest folgt mit Satz 10.8(ii)]

Wegen $\frac{L'}{L}(s,\chi_0)=\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+O(\log(q))=-\frac{1}{s-1}+O(\log(q))$

können wir $\chi\neq\chi_0$ annehmen.

Nach Satz 10.8 können wir ferner auch $\chi^2=\chi_0$ annehmen.

Nach Lemma 10.7 haben wir

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi)=-\sum_{\substack{\rho,\ L(\rho,\chi)=0\\ |\mathrm{Im}(\rho)-t|\leq 1}}\frac{1}{s-\rho}+R(s,\chi), \qquad \otimes$$

wo $|R(s,\chi)|\leq C\mathcal{L}$ gilt für eine absolute Konstante $C>0$.

- Wir nehmen an, $L(s,\chi)$ habe die Nst. $\rho_1=\beta_1+i\gamma_1$ mit $\beta_1>1-\frac{c_0}{\log(q)}$, $|\gamma_1|<\frac{c_0}{2\log(q)}$.

Falls $\rho_1 \notin \mathbb{R}$ ist auch $\bar{\rho}_1$ Nst., und haben dann für $\sigma_0 = 1 + \frac{2c_0}{\log(q)}$,

dass $\frac{1}{\sigma_0-\beta_1-i\gamma_1} + \frac{1}{\sigma_0-\beta_1+i\gamma_1} = \frac{2(\sigma_0-\beta_1)}{(\sigma_0-\beta_1)^2+\gamma_1^2} = \frac{2}{\sigma_0-\beta_1}\cdot\frac{1}{1+\frac{\gamma_1^2}{(\sigma_0-\beta_1)^2}} > 0.$

Mit $0 < \gamma_1 \le \frac{1}{2}(\sigma_0-1) \le \frac{1}{2}(\sigma_0-\beta_1)$ folgt $\frac{2}{\sigma_0-\beta_1}\cdot\frac{1}{1+\frac{\gamma_1^2}{(\sigma_0-\beta_1)^2}} \ge \frac{2}{\sigma_0-\beta_1}\cdot\frac{1}{1+1/4} \ge \frac{8}{5}\cdot\frac{\log(q)}{3c_0}$.

Wende nun $\otimes$ an mit $s=\sigma_0$, dies ergibt

$$-\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi) \le -\frac{8}{15}\cdot\frac{\log(q)}{c_0} + \mathrm{Re}(R(\sigma_0,\chi)),$$ falls mindestens eine der Nst. $\notin \mathbb{R}$ ist.

Andererseits ist $-\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi) = \sum_{n\ge 1}\Lambda(n)\chi(n)n^{-\sigma_0} \ge \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0) \ge -\frac{\log(q)}{2c_0} + O(1)$,

was im $\lightning$ zu vorigem steht, wenn $q \ge q_0$, denn $-\frac{1}{2} > -\frac{8}{15}$.

- Wir nehmen ferner an, $L(s,\chi)$ habe zwei reelle Nst. ρ_1, ρ_2 in $\mathcal{G}$ (nicht notwendig verschieden).

Dann ist $\frac{1}{\sigma_0-\beta_1} + \frac{1}{\sigma_0-\beta_2} = \frac{2\sigma_0-\beta_1-\beta_2}{(\sigma_0-\beta_1)(\sigma_0-\beta_2)}$, und wären $\beta_1, \beta_2 > 1 - \frac{c_0/2}{\log(q)}$, folgte

$$\frac{2\sigma_0-\beta_1-\beta_2}{(\sigma_0-\beta_1)(\sigma_0-\beta_2)} \ge (2\sigma_0-\beta_1-\beta_2)\cdot\frac{\log(q)}{3c_0}\cdot\frac{1}{\sigma_0-\beta_1} \ge \frac{4c_0}{\log(q)}\cdot\frac{\log(q)}{5c_0/2}\cdot\frac{1}{\sigma_0-\beta_1} = \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{\sigma_0-\beta_1} \ge \frac{8}{5}\cdot\frac{\log(q)}{5c_0/2} = \frac{16}{25}\cdot\frac{\log(q)}{c_0}$$

$$\Rightarrow -\frac{\log(q)}{2c_0} + O(1) \le -\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi) \le -\frac{16}{25}\cdot\frac{\log(q)}{c_0},$$ $\lightning$ wenn $q \ge q_0$, denn $-\frac{1}{2} > -\frac{16}{25}$.

$\rightsquigarrow c_0$ anpassen. $\square$

11.4 **Def.:** Sei $q \in \mathbb{N}$, χ ein Charakter mod q und $c_0 > 0$ fest. Die einzige möglicherweise existierende einfache reelle Ausnahmenullstelle β von $L(s,\chi)$, für die die Abschätzung $\beta \ge 1 - \frac{c_0}{\log(q)}$ gilt, heißt auch Siegel-Nullstelle / Siegel-Landau-Nst, bzw. exzeptionelle Nullstelle von $L(s,\chi)$. Der zugeh. Char. χ heißt Ausnahmecharakter.

11.5 **Bem.:** Es wird vermutet, dass Siegel-Nullstellen nicht existieren. Wesentlich stärker ist die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung (GRH), nach der $\left(L(s,\chi)=0 \text{ mit } 0<\mathrm{Re}(\sigma)<1 \Rightarrow \mathrm{Re}(\sigma)=\frac{1}{2}\right)$ gilt für (jede Fkt.) $L(s,\chi)$.

Da Siegel-Nullstellen bis heute nicht ausgeschlossen werden können, muss buchstäblich mit ihnen gerechnet werden, vor allem in den expliziten Formeln in 11.11.

Wir tragen nun alle Erkenntnisse zusammen, um den folgenden PZS in APs zu zeigen:

11.6 **Satz** (Primzahlsatz von (Page-) Siegel-Walfisz): Es sei $A > 0$ beliebig groß, $q \in \mathbb{N}$, $(a,q)=1$ und $1 \le q \le \log^A(x)$. Dann ex. eine absolute Konstante $c > 0$ mit

(i) $\psi(x,\chi) = O_A\left(x\cdot\exp(-c\sqrt{\log(x)})\right)$ für jeden Charakter $\chi \ne \chi_0$ mod q,

(ii) $\psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_A\left(x\cdot\exp(-c\sqrt{\log(x)})\right)$,

(iii) $\pi(x;q,a) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} + O_A\left(x\cdot\exp(-c\sqrt{\log(x)})\right)$.

also $A \geq \frac{\log(q)}{\log\log(x)}$.

Bew.: Zu (i): Sei χ ein Charakter mod $q \leq \log^A(x)$, und OE sei $x = m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{N}$.

Wir setzen $c = 1 + \frac{1}{\log(x)}$ und $T = \exp(\sqrt{\log(x)})$.

Nach der Perronschen Formel Satz 3.12

gilt $\psi(x,\chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right) \frac{x^s}{s}\, ds + O\left(x \exp(-\sqrt{\log(x)}) \cdot \log^2(x)\right)$.

Nach Satz 10.8 (i) gibt es eine absolute Konstante $c_0 > 0$ mit $L(s,\chi) \neq 0$

und $\frac{L'}{L}(s,\chi) = O(\log^2(x))$ für $\sigma \geq 1 - \frac{c_0}{\log(x)}$ und $1 \leq |t| \leq T$.

Nach Satz 11.2 gibt es eine absolute Konstante $c_1 > 0$, so dass im Gebiet

$\sigma > 1 - \frac{c_1}{\log(q)}$ und $|t| < 1$ die Fkt. $L(s,\chi)$ höchstens eine reelle Nst. β besitzt.

Sei $\varepsilon = \frac{1}{2A}$. Nach dem Satz 10.2 von Siegel gilt $L(1,\chi) > \tilde{c}(\varepsilon) q^{-\varepsilon}$ für eine Konstante $\tilde{c}(\varepsilon) > 0$.

(*) Der MWS zeigt dann, dass $L(\sigma,\chi) \neq 0$ für $\sigma > 1 - q^{-\varepsilon}$ und alle $q > q_0(\varepsilon)$ gilt:

$L(\sigma,\chi) = L(1,\chi) - (1-\sigma) L'(\tilde{\sigma},\chi)$ mit $\sigma \leq \tilde{\sigma} \leq 1$. Man kann zeigen (vgl. Ü A2 Bl. 7),

dass für $1 - q^{-\varepsilon} \leq \tilde{\sigma} \leq 1$ nun $L'(\tilde{\sigma},\chi) = O(\log^2(2q))$ gilt. Also: $L(\sigma,\chi) \gtrsim_\varepsilon q^{-\varepsilon/2} - q^{-\varepsilon} \log^2(q) > 0$.

Somit gilt $\beta \leq 1 - q^{-1/(2A)}$, falls $q \geq q_0(A)$ gilt.

(Dabei ist $q_0(A)$ nicht effektiv in Abh. von A angebbar.)

- Wir ergänzen den Integrationsweg $[c-iT, c+iT]$ zur geschlossenen Kurve

$$\mathcal{C} = [c-iT, c+iT] \cup [c+iT, a+iT] \cup [a+iT, a-iT] \cup [a-iT, c-iT]$$

mit $a = 1 - \frac{c_2}{\log(x)}$, wo $c_2 = \min\{c_0, c_1\}$. Aus Lemma 10.7 folgt wie im

Beweis von Satz 10.8, dass auch für $\sigma = a$ und $|t| \leq 1$

die Abschätzung $\frac{L'}{L}(s,\chi) = O(\log^2(x))$ gilt.

Insgesamt erhalten wir mit $|\vartheta| \leq 2$, dass

$$\psi(x,\chi) = \operatorname{Res}_1\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\frac{x^s}{s}\right) + \operatorname{Res}_\beta\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\frac{x^s}{s}\right) + O_A\left(x \exp(-c\sqrt{\log(x)})\right)$$

$$= E(q,\chi)\, x - \vartheta x \exp(-\sqrt{\log(x)}) + O_A\left(x \exp(-c\sqrt{\log(x)})\right),$$

wobei der von β herrührende Term nur dann auftritt, falls β existiert.

$$\hookrightarrow -\frac{x^\beta}{\beta} = -\frac{x}{\beta} \cdot x^{\beta-1} \ll x \cdot e^{(\beta-1)\log(x)} \ll x e^{-\sqrt{\log(x)}},$$

denn $\beta - 1 \leq -q^{-1/(2A)} \leq -q^{-1/\left(2\frac{\log(q)}{\log\log(x)}\right)} = -e^{-\frac{\log\log(x)}{2}}$

$= -(\log(x))^{-1/2}$

Damit ist (i) gezeigt.

Zu (ii): Aus dem ONR folgt Satz 8.7, nach dem ist

$$\psi(x;q,a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a (q)}} \Lambda(n) \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi (q)} \overline{\chi}(a) \underbrace{\sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n)}_{= \psi(x,\chi)} \overset{(i)}{=} \underbrace{\frac{x}{\varphi(q)}}_{\text{für } \chi_0} + O_A\left(x \exp(-\tilde{c}\sqrt{\log(x)})\right).$$

anpassen

Zu (iii): Dies folgt aus (ii) durch partielle Summation, genau wie in Kor. 5.5. □

11.7. **Bem.:** Der im Beweis zu (i) auftretende Term $-\frac{x^\beta}{\beta}$, der nur bei Existenz von β vorkommt, zeigt auch (i)': $\Psi(x,\chi) = -\frac{x^\beta}{\beta} + O(x\cdot\exp(-c\sqrt{\log(x)}))$ für $\chi=\chi_\beta$,

(ii)' $\Psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} - \frac{\chi(a)}{\varphi(q)}\cdot\frac{x^\beta}{\beta} + O(x\cdot\exp(-c\sqrt{\log(x)}))$ für $\chi=\chi_\beta$,

[$\pi(x,q,a) \ll \frac{x}{q}$ ist trivial]

(iii)' $\pi(x;q,a) = \frac{li(x)}{\varphi(q)} - \frac{\chi(a)\,li(x^\beta)}{\varphi(q)} + O(x\cdot\exp(-c\sqrt{\log(x)}))$ für $\chi=\chi_\beta$, der Ausnahmecharakter zu β.

Dies gilt dann sogar für $q \le \exp(2c\sqrt{\log(x)})$.

11.8. **Bem.:** Siegel-Nullstellen treten nur selten auf: • Nach einem Satz von Landau ex. ein $c>0$ so, dass $\prod_{\chi(q)} L(s,\chi)$ höchstens eine Nst. β in $\sigma > 1-\frac{c}{\log(q)}$ hat. In diesem Fall ist β reell und der zugehörige Ausnahmecharakter ist reell.

• Nach einem Satz von Page ex. ein $c>0$ so, dass für alle $Q \ge 1$ die Fkt. $\prod_{q\le Q}\prod_{\chi(q)}{}^{*} L(s,\chi)$ höchstens eine Nst. β in $\sigma > 1-\frac{c}{\log(Qq)}$ hat.

Dabei durchläuft χ alle primitiven Charaktere mod q. [MV, 11.9, 11.10]

11.9. **Bem.:** Die gezeigte Absch. ⊛ im obigen Beweis von 11.6 zeigt, dass $\beta \le 1-\frac{c(\varepsilon)}{q^\varepsilon}$ für eine (ineffektive) Konstante $c(\varepsilon)>0$ ist, falls β ex. Auch diese Aussage wird gelegentlich als "Satz von Siegel" bezeichnet.

11.10. **Bem.:** Der Bereich $q \le \log^A(x)$ im Satz von Siegel-Walfisz fällt leider nur sehr klein aus. Die Konstante $A>0$ kann zwar bel. groß gewählt werden, aber die O_A-Konstante hängt in bislang nicht effektiv angebbarer Weise von A ab (wegen der Verwendung des Satzes von Siegel).

Jeder Satz, der im Beweis den Satz von Siegel-Walfisz (und damit den Satz von Siegel) benutzt, hat diesen Makel.

Das trifft z.B. zu auf den zentralen Satz von Bombieri-Vinogradov, den wir später in der Vorlesung beweisen werden.

11.11. **Bem.:** Die Anwendung der Perronschen Formel 3.12 auf $\Psi(x,\chi)$ unter Berücksichtigung aller überstrichenen Nullstellen von $L(s,\chi)$ und ihrer Residuen von $-\frac{L'}{L}(s,\chi)\frac{x^s}{s}$ führt auf explizite Formeln für $\Psi_0(x,\chi) := \frac{1}{2}(\Psi(x^+,\chi)-\Psi(x^-,\chi))$, nämlich $(x>1)$

$$\Psi_0(x,\chi) = -\sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{\chi(-1)}{2}\log(x+1) + C(\chi) \text{ mit } C(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta} + O(\log(q)), & \beta \text{ ex.}, \\ O(\log(q)), & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\uparrow$ alle Nst. in $\mathrm{Re}\,\rho \ge 0$ inklusive ev. β

11.12. **Bem.:** (GRH) $\Rightarrow \Psi(x;\chi_0) = x + O(x^{1/2}\log^2(x))$, $\Psi(x;\chi) \ll x^{1/2}\log^2(x)$ für $\chi \ne \chi_0$ [MV, Cor. 12.11]

Somit: (GRH) $\Rightarrow \Psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(x^{1/2}\log^2(x))$.