Vorlesung Zahlentheorie II (Analytische ZT)

SoSe '23, hhu
K. Halupczok

a10: Der Satz von Siegel

Stichworte: Satz von Siegel, Ineffektivität der Siegel-Konstanten, Beweis nach Estermann, nullstellenfreies Gebiet für $L(s,\chi)$

10.1. Einleitung: Im Beweis des Dirichletschen PZSes in a8 spielte die Aussage $L(1,\chi)\neq 0$ eine große Rolle. Diese muss für stärkere PZSätze verschärft werden, d.h. mit einer unteren Schranke >0 quantifiziert werden, was Siegel 1935 zeigte (und seither unverbessert ist):

10.2. Satz von Siegel: Sei $\chi\neq\chi_0$ ein reeller Charakter mod q und $\varepsilon>0$. Es existiert ein $\tilde{c}(\varepsilon)$, so dass $L(1,\chi)>\tilde{c}(\varepsilon)\cdot q^{-\varepsilon}$. [$\tilde{c}(\varepsilon)$ nur von ε abh.]

10.3. Bem.: Aus keinem bekannten Beweis kann eine effektive Abhängigkeit der Konstanten $\tilde{c}(\varepsilon)$ von ε (etwa in der Form $\tilde{c}(\varepsilon)\leq 100\varepsilon^{-5}$) entnommen werden. [Die einzig bekannte effektive Version lautet $L(1,\chi)\geq c\,q^{-1/2}$, c angebbar.] Jeder Satz, der im Beweis den Satz von Siegel verwendet, hat diesen Makel!

(nach T. Estermann)

10.4. Bew.: 1.) Es genügt, primitive χ mod q zu betrachten:
Sonst sei χ von χ^* mod q^* erzeugt, $1<q^*\mid q$. Sei die Beh. für χ^* schon gezeigt.

Wir haben $L(s,\chi)=L(s,\chi^*)\cdot\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{\chi^*(p)}{p^s}\right)$ nach Satz 9.6.

Das $\prod$ ist $\geq\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p}\right)\geq\prod_{p\leq q}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\exp\left(\sum_{p\leq q}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)=\exp\left(-\sum_{p\leq q}\sum_{\ell\geq 1}\frac{1}{\ell p^\ell}\right)$

$\geq\exp(-\log\log(q)-D_1)=\frac{D_2}{\log(q)}$

mit $D_2>0$. Somit: $L(1,\chi)\geq L(1,\chi^*)\frac{D_2}{\log(q)}\geq\tilde{c}(\frac{\varepsilon}{2})q^{-\varepsilon/2}\frac{D_2}{\log(q)}\geq\tilde{c}(\varepsilon)q^{-\varepsilon}$.

2.) Seien χ_1 mod q_1 und χ_2 mod q_2 verschiedene, primitive reelle Charaktere. Dann: $\chi_1\chi_2 \neq \chi_0$ mod q_1q_2 ⌜Sonst $\chi_1=\chi_2$ mod q_1q_2. Dann folgt wie im Bew. von Satz 9.3 (a), dass q_1q_2, q_1, q_2 und (q_1,q_2) Perioden auf $\{n;\ (n,q_1q_2)=1\}$ sind. Die Primitivität zeigt $q_1=(q_1,q_2)=q_2$, $\chi_1=\chi_2$ ↯.⌟
Somit ist $F(s)=F(s,\chi_1,\chi_2):=\zeta(s)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)L(s,\chi_1\chi_2)$ holomorph in $\{s,\ \sigma>0,\ s\neq 1\}$, F hat in $s=1$ Pol 1. Ordnung mit Residuum
$\lambda:=L(1,\chi_1)L(1,\chi_2)L(1,\chi_1\chi_2)\in\mathbb{R}$.

3.) Es gilt $F(\sigma)>\frac{1}{2}-\frac{c_1\lambda}{1-\sigma}(q_1q_2)^{4(1-\sigma)}$ für $\frac{7}{8}<\sigma<1$. "Estermanns Lemma"

3.1) Haben $F(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{f(n)}{n^s}$ mit $f=\mathbb{1}*\chi_1*\chi_2*\chi_1\chi_2$ in $\sigma>1$.

Beh.: $\forall n: f(n)\geq 0$. Klar: $f(1)=1$, da f multiplikativ.

⌜Die Eulerprodukte der Faktoren von F zeigen für $\sigma>1$, dass
$$\log(F(s))=\sum_p\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}p^{-ks}\underbrace{\left(1+\chi_1(p^k)+\chi_2(p^k)+\chi_1\chi_2(p^k)\right)}_{=(1+\chi_1(p^k))\cdot(1+\chi_2(p^k))\geq 0},$$
also sind die Koeffizienten der Dirichletreihe von $\log(F(s))$ alle reell und ≥ 0, dasselbe gilt dann für die Koeffizienten von $F(s)=\exp(\log(F(s)))$, die $f(n)$.⌟

3.2) F kann um $s_0=2$ in eine Potenzreihe vom Kgz.radius 1 (Pol bei $s=1$) entwickelt werden: $F(s)=\sum_{\nu\geq 0}\alpha_\nu(2-s)^\nu$, $|2-s|<1$, mit $\forall\nu: \alpha_\nu\geq 0$, $\alpha_0=F(2)\geq f(1)=1$, denn $\alpha_\nu=(-1)^\nu\cdot\frac{F^{(\nu)}(2)}{\nu!}=\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\sum_{k\geq 1}(-1)^\nu\frac{f(k)\log^\nu(k)}{k^2}\geq 0$ für $f(k)\geq 0$. Nun gilt:
$F(s)-\frac{\lambda}{s-1}$ ist holomorph in $\{s;\ |s-2|<2\}$, haben somit
$$F(s)-\frac{\lambda}{s-1}=\sum_{\nu\geq 0}(\alpha_\nu-\lambda)(2-s)^\nu \text{ für } |s-2|<2. \quad (*)$$

3.3) Mit $|\sum_{A<n<B}\chi(n)|\leq\varphi(q)$ für χ mod q zeigt part. $\sum$: $L(s,\chi)=s\int_1^\infty\left(\sum_{n\leq u}\chi(n)\right)u^{-s-1}du$
$$\Rightarrow L(s,\chi)\ll\int_1^q u^{-\sigma}du+q\int_q^\infty u^{-\sigma-1}du\ll\frac{q^{1-\sigma}}{1-\sigma}+q\cdot\frac{q^{-\sigma}}{\sigma}\ll q^{1/2} \text{ für } \sigma\geq\tfrac{1}{2} \text{ und } \sigma\leq\tfrac{7}{2}.$$
Also: $L(s,\chi_j)\ll q_j^{1/2}$ für $j=1,2$, $L(s,\chi_1\chi_2)\ll q_1^{1/2}q_2^{1/2}$ für $|s-2|\leq\frac{3}{2}$,
also $|\lambda|\ll q_1q_2$. Mit $\zeta(s)\ll 1$ für $|s-2|=\frac{3}{2}$ zeigt dies
$$F(s)-\frac{\lambda}{s-1}\ll q_1q_2 \text{ für } |s-2|=\tfrac{3}{2}.$$
Die Koeff. $\alpha_\nu-\lambda$ der Potenzreihe in $(*)$ erfüllen mit der Cauchyformel daher die Ungl. $|\alpha_\nu-\lambda|\ll q_1q_2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^\nu$.

↳ ⌜$\frac{1}{n!}|f^{(n)}(z_0)|\leq\frac{1}{r^n}\max_{|z-z_0|=r}|f(z)|$⌟

3.4) Sei nun $\frac{7}{8} \le \sigma < 1$. Mit (später zu wählendem) $N = N(q_1, q_2)$ folgt

$$\sum_{\nu \ge N} |\alpha_\nu - \lambda| (2-\sigma)^\nu \ll q_1 q_2 \sum_{\nu \ge N} \left(\tfrac{2}{3}\right)^\nu \left(\tfrac{9}{8}\right)^\nu \ll q_1 q_2 \left(\tfrac{3}{4}\right)^N \ll q_1 q_2 e^{-N/4}.$$

Dies liefert

$$F(\sigma) - \frac{\lambda}{\sigma - 1} \ge \sum_{0 \le \nu \le N-1} (\alpha_\nu - \lambda)(2-\sigma)^\nu - C q_1 q_2 e^{-N/4}$$

$$\ge 1 - \lambda \frac{(2-\sigma)^N - 1}{1-\sigma} - C q_1 q_2 e^{-N/4}. \quad \text{[alle } \alpha_\nu \ge 0,\ \alpha_0 = 1\text{]}$$

sei C hier die impl. Konstante, $C > 1$.

Bestimme jetzt N so, dass $\frac{1}{2} e^{-N/4} < C \cdot q_1 q_2 e^{-N/4} < \frac{1}{2}$ ist,

insb. $N \le 4 \log(q_1 q_2) + C_0$ und $(2-\sigma)^N = \exp(N \log(1 + (1-\sigma))) < \exp(N(1-\sigma)) \ll (q_1 q_2)^{4(1-\sigma)}$.

Man erhält

$$F(\sigma) > 1 - C_1 \frac{\lambda}{1-\sigma} (q_1 q_2)^{4(1-\sigma)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - C_1 \frac{\lambda}{1-\sigma} (q_1 q_2)^{4(1-\sigma)},$$ die Beh. 3).

4.) Zeige nun Siegels Unglg. für $\chi_2 \bmod q_2$. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Nimm folgendes $\chi_1 \bmod q_1$:

4.1) 1. Fall: $\exists\, q_1^*$, primitives $\chi_1^* \bmod q_1^*$ mit $\chi_1^* \ne \chi_0$, $\chi_1^2 = \chi_0$ und $L(\sigma_1, \chi_1) = 0$ für ein $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon) \in (1 - \frac{\varepsilon}{16}, 1)$.

Definiere F mit diesem χ_1. Für jedes zulässige χ_2 gilt $F(\sigma_1) = F(\sigma_1, \chi_1, \chi_2) = 0$.

4.2) 2. Fall: es ex. kein q_1, χ_1 wie im 1. Fall. Fixiere irgendein q_1, ein $\chi_1 \bmod q_1$ mit $\chi_1 \ne \chi_0$, $\chi_1^2 = \chi_0$. Wegen $L(\sigma, \chi_1)$, $L(\sigma, \chi_2)$, $L(\sigma, \chi_1\chi_2) \xrightarrow[\sigma \to \infty]{} 1$, wegen der Reellwertigkeit und Nichtverschwinden bei $\sigma > 1 - \frac{\varepsilon}{8}$ ist

$$L(\sigma, \chi_1) L(\sigma, \chi_2) L(\sigma, \chi_1\chi_2) > 0 \quad \text{für } \sigma \in (1 - \tfrac{\varepsilon}{8}, 1).$$

Da $\zeta(\sigma)$ beim Durchqueren des Pols das VZ wechselt ($\zeta(\sigma) < 0$ für $0 < \sigma < 1$), findet sich ein $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon) \in (1 - \frac{\varepsilon}{8}, 1)$ mit $F(\sigma_1) < 0$ für alle zulässigen χ_2.

4.3) Aus 3.) ergibt sich bei festem $\sigma_1(\varepsilon)$, $\chi_1 \bmod q_1$ und bel. $\chi_2 \bmod q_2 > q_1$, dass

$$\frac{C_1 \lambda}{1-\sigma_1} (q_1 q_2)^{4(1-\sigma_1)} > \frac{1}{2} - F(\sigma_1) \ge \frac{1}{2}$$

bzw. $\lambda \gg (1-\sigma_1)(q_1 q_2)^{4(1-\sigma_1)}$.

Da $L(1, \chi_1) L(1, \chi_1\chi_2) \ll \log(q_1) \cdot \log(q_1 q_2) \ll_\varepsilon \log(q_2)$ ($q_1 = q_1(\varepsilon)$) (vgl. Ü A1 Bl. 7; wie in 3.3),

folgt $L(1, \chi_2) \gg_\varepsilon q_2^{4(1-\sigma_1)} \log^{-1}(q_2) \gg_\varepsilon q_2^{-\varepsilon/2} \log^{-1}(q_2) \gg_\varepsilon q_2^{-\varepsilon}$.

Dies gilt für alle zulässigen χ_2 mit $q_2 > q_1(\varepsilon)$, durch ev. Verkleinern der impliziten Konstanten kann die Unglg. für alle q_2 gezeigt werden. □

Wir wollen nun eine möglichst starke Version des PZSes in APs zeigen, wobei die Gleichmäßigkeit in einem möglichst großen q-Bereich kontrolliert werden soll. Dazu muss auch ein möglichst großes nullstellenfreies Gebiet für $L(s, \chi)$ hergeleitet werden.

So wie wir für den Beweis des PZSes zuerst die Abschätzung 4.6 für ζ benötigt haben, muss eine solche auch für L-Funktionen gezeigt werden, was wir ähnlich wie dort zeigen. Dabei muss der Fall $\chi=\chi_0$ von $\chi\neq\chi_0$ unterschieden werden.

10.4. **Def.:** Sei $q\in\mathbb{N}$, χ Charakter mod q, dann sei $E(q,\chi):=\begin{cases}1, & \chi=\chi_0,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$

10.5. **Satz:** Sei $q\in\mathbb{N}$, χ Charakter mod q, $M\in\mathbb{N}$. Dann gilt für $s=\sigma+it$ mit $\sigma>-M$, dass $L(s,\chi)-E(q,\chi)\cdot\frac{\varphi(q)}{q(s-1)}=\mathcal{O}_M(|s|^{M+1}q^{M+2})$.

Bew.: Laut Eulerscher Summenformel Satz 1.6 erhalten wir für $a\in\mathbb{Z}$:

$$\sum_{m=0}^{\infty}(qm+a)^{-s}=\int_0^\infty(qu+a)^{-s}du-qs\int_0^\infty(qu+a)^{-s-1}P_0(u)du-\tfrac12 a^{-s},\quad P_0(u)=u-\lfloor u\rfloor-\tfrac12,$$

$$=\frac{a^{-s+1}}{s-1}-\frac{a^{-s}}{2}-qs\int_0^\infty(qu+a)^{-s-1}P_0(u)du.$$

Def. Fkt. P_ℓ für $\ell\in\mathbb{N}$ durch $P_{\ell+1}'(u)=P_\ell(u)$ und $\int_0^1P_\ell(u)du=0$, dann gilt partielle $\int$:

$$\int_0^\infty(qu+a)^{-s-1}P_0(u)du=\tfrac12 q(s+1)(qu+a)^{-s-2}\Big|_0^\infty-\sum_{\ell\geq2}\ell!\,P_\ell(0)q^\ell a^{-s-\ell-1}$$
$$+q^M(s+1)\cdots(s+M)\int_0^\infty(qu+a)^{-s-M-1}du,$$

also $$\sum_{m=0}^{\infty}(qm+a)^{-s}=\frac{a^{-s+1}}{s-1}-\frac{a^{-s}}{2}-\sum_{\ell=2}^{M-1}\ell!\,P_\ell(0)q^\ell a^{-s-\ell}+q^{M+1}s(s+1)\cdots(s+M)\underbrace{\int_0^\infty(qu+a)^{-s-M-1}P_M(u)du}_{=:f(s),\ \text{in } \mathrm{Re}(s)>-M \text{ holomorph}},$$

Somit: $\sum_{m=0}^{\infty}(qm+a)^{-s}-\frac{a^{-s+1}}{s-1}=\mathcal{O}_M(q^{M+1}|s|^{M+1})$.

Wegen der ONR $\sum_{a=1}^{q}\chi(a)=E(q,\chi)\varphi(q)$ erhalten wir $\sum_{a=1}^{q}\chi(a)\frac{a^{-s+1}}{s-1}=E(q,\chi)\frac{\varphi(q)}{s-1}+\underbrace{h(q,\chi,s)}_{=\mathcal{O}(q^{M+2}),\ \text{holomorph}}$

für $\mathrm{Re}(s)>-M$ also $L(s,\chi)-E(q,\chi)\frac{\varphi(q)}{q(s-1)}=\mathcal{O}_M(|s|^{M+1}q^{M+2})$. □

10.6. **Def.:** Für $q\in\mathbb{N}$ und $t\in\mathbb{R}$ sei $\mathcal{L}:=\log(q)+\log(|t|+2)$.

Es sei χ ein Charakter mod q und $T>0$. Dann bezeichne

$$N(T,\chi):=\#\{\rho=\beta+i\gamma;\ L(\rho,\chi)=0,\ 0\leq\gamma<T,\ 0\leq\beta\leq1\}$$

die Anzahl der Nullstellen von $L(s,\chi)$ im kritischen Streifen mit Imaginärteil $<T$ (und ≥0).

Wir benötigen die folgende Version von Lemma 4.4 für L-Funktionen.

10.7. **Lemma:** Sei $q\in\mathbb{N}$, χ Charakter mod q, $T\geq0$, $m\in\mathbb{N}$. Dann ist

(i) $N(T+1,\chi)-N(T,\chi)=\mathcal{O}(\mathcal{L})$,

(ii) Für alle $s=\sigma+it$ mit $\sigma\geq-m$ gilt

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi)=\frac{E(q,\chi)}{s-1}-\sum_{\substack{\rho,\ L(\rho,\chi)=0\\ |\mathrm{Im}(\rho)-t|\leq1}}\frac{1}{s-\rho}+\mathcal{O}_m(\mathcal{L}).$$

Bew.: Wenden Lemma 4.4 an auf

$$f(s) := (s-1)^{E(q,\chi)} L(s,\chi), \quad s_0 := 2+iT, \quad r = 4(m+3).$$

Haben $|f(s_0)| = |(s_0-1)|^{E(q,\chi)} \prod_p \frac{1}{|1-\chi(p)p^{-s_0}|} \geq \prod_p \frac{1}{1+p^{-2}} \gg 1.$

$\hookrightarrow L(s,\chi) \ll |s|^{m+1} q^{m+2} \leq (qT)^{2m+3}$

Nach Satz 10.5 sind die Vor. von Lemma 4.4 mit $M = 4(m+3)\mathcal{L}$ erfüllt.

Dies ergibt für $|s-s_0| \leq m+3$ dann

$$(\sigma > -m-1) \qquad \circledast \quad \frac{L'}{L}(s,\chi) + \frac{E(q,\chi)}{s-1} - \sum_\rho \frac{1}{s-\rho} = O_m(\mathcal{L}),$$

wobei ρ alle Nullstellen von $L(s,\chi)$ mit $|\rho - s_0| \leq 2(m+3)$ entsprechend Vielfachheit durchläuft.

- Wende $\circledast$ zunächst mit $s = s_0$ und $m = 2$ an.

  Wegen $\frac{L'}{L}(s_0,\chi) = O(1)$ und $\frac{E(q,\chi)}{s_0-1} = O(1)$ erhalten wir damit

  $$\oplus \quad \mathrm{Re}\Big(\sum_{|\rho-s_0|\leq 10} \frac{1}{s_0-\rho}\Big) = O(\mathcal{L}).$$

  Für $\rho = \beta + i\gamma$ ist

  $$\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{s_0-\rho}\Big) = \mathrm{Re}\Big(\frac{\overline{s_0-\rho}}{|s_0-\rho|^2}\Big) = \frac{2-\beta}{|s_0-\rho|^2}.$$ Es ist $2-\beta \geq 1$ und $|s_0-\rho|^2 \leq 100$,

  also $\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{s_0-\rho}\Big) \geq \frac{1}{100}$, es folgt mit $\oplus$, dass $N(T+1,\chi) - N(T,\chi) = O(\mathcal{L})$, also (i).

- Mit $\circledast$ folgt schließlich für $|s-s_0| \leq m+2$, dass $\leftarrow \sigma \geq 2-(m+2) = -m$

  $$\Big|\frac{L'}{L}(s,\chi) + \frac{E(q,\chi)}{s-1} - \sum_{|\rho-s_0|\leq 1} \frac{1}{s-\rho}\Big| = O_m(\mathcal{L}) + O_m\Big(\sum_{1\leq|\rho-s_0|\leq 2(m+3)} \frac{1}{s-\rho}\Big) = O_m(\mathcal{L}),$$

  also (ii). □

Mit Lemma 10.7 gelingt nun ein wesentlicher Satz über nullstellenfreie Gebiete von $L(s,\chi)$. Dieser lässt noch den Fall $\chi^2 = \chi_0$, $|\tau|$ klein, offen, was wir erst in a11 behandeln (unter Verwendung des Satzes von Siegel 10.2).

10.8. Satz (nullstellenfreies Gebiet für L-Funktionen):

(i) Es sei $\chi^2 \neq \chi_0$ (d.h. χ komplex) oder $|t| \geq 1$. Dann gibt es eine absolute Konstante $c_0 > 0$ so, dass $L(s,\chi) \neq 0$ für $\sigma \geq 1 - 2c_0\mathcal{L}^{-1}$ gilt. Für $\sigma \geq 1 - c_0\mathcal{L}^{-1}$ ist $\frac{L'}{L}(s,\chi) = O(\mathcal{L}^2)$.

(ii) Es sei $\chi^2 = \chi_0$ (d.h. χ reell). Dann gibt es eine absolute Konstante $c_1 > 0$ mit folgender Eigenschaft: Es sei $0 < \delta < c_1$ und $\rho = \beta + i\gamma$ beliebige Nullstelle von $L(s,\chi)$ mit $|\gamma| \geq \frac{\delta}{\log(q)}$, dann ist $\beta \leq 1 - \frac{\delta}{R\mathcal{L}}$ für eine absolute Konstante $R > 0$.

Für $\sigma \geq 1 - \frac{\delta}{10\mathcal{L}}$ gilt dann $\frac{L'}{L}(s,\chi) = O(\mathcal{L}^2)$.

Bew.: Zu (i): Angenommen, $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ sei Nst. der Ordnung $m \geq 1$ von $L(s,\chi)$,
wo $\gamma_0 \geq 0$, $\beta_0 = 1 - \frac{d_0}{\mathcal{L}_\gamma}$ mit $d_0 > 0$, $\mathcal{L}_\gamma = \log(q) + \log(\gamma_0 + 2)$.

Setzen

$$h(\sigma,\chi) = 3\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0) + 4\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma_0,\chi) + \frac{L'}{L}(\sigma+2i\gamma_0,\chi^2) \text{ und } \sigma_0 := 1 + \frac{4d_0}{\mathcal{L}_\gamma}.$$

Für $\sigma > 1$ ist $\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0) = \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + O\Big(\sum_{p|q} \log(p) p^{-\sigma} \sum_{m\geq 0} p^{-m\sigma}\Big) = \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + O(\log(q))$ laut Satz 8.6.
und damit $\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi_0) = -\frac{1}{\sigma_0 - 1} + O(\mathcal{L}_\gamma)$. ⊕

Wende nun Lemma 4.5 an mit $s_0 = \sigma_0 + i\gamma_0$, $r = \frac{1}{2}$, $f(s) = L(s,\chi)$,
und mit $s_0' = \sigma_0 + 2i\gamma_0$, $r = \frac{1}{2}$, $f(s) = L(s,\chi^2)$ an.

Für absolute Konstanten $c_1, c_2, \ldots > 0$ gilt
wegen $|L(\sigma_0 + i\gamma_0,\chi)| \geq \prod_p \frac{1}{1+p^{-\sigma_0}} \geq \zeta(\sigma_0)^{-1} \geq \frac{c_1}{\sigma_0 - 1} = \frac{c_1 \mathcal{L}_\gamma}{4d_0}$
bzw. $|L(\sigma_0 + 2i\gamma_0,\chi^2)| \geq \prod_p \frac{1}{1+p^{-\sigma_0}} \geq \frac{c_1}{\sigma_0 - 1} = \frac{c_1 \mathcal{L}_\gamma}{4d_0}$
dann $\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| \leq e^K$ bzw. $\left|\frac{f(s)}{f(s_0')}\right| \leq e^K$ mit $K \leq c_2 \mathcal{L}$. ⌜Denn $L(s,\chi) \ll e^{B\mathcal{L}_\gamma}$ für ein $B > 0$, alle s nahe s_0, s_0'.
(Mit Satz 10.5, wie im Bew. von 10.7)⌟

Dann ergibt Lemma 4.5, dass

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{L'}{L}(\sigma_0 + i\gamma_0,\chi)\right) < c_2 \mathcal{L}_\gamma - \frac{1}{\sigma_0 - \beta_0} \quad \text{⌜wegen Nst. } \rho_0 \text{ laut Ann.⌟}$$

sowie $-\mathrm{Re}\left(\frac{L'}{L}(\sigma_0 + 2i\gamma_0,\chi^2)\right) < c_3 \mathcal{L}_\gamma$.

Dies ergibt mit ⊕, dass $\mathrm{Re}(h(\sigma_0,\chi)) \geq -\frac{3}{\sigma_0 - 1} + \frac{4}{\sigma_0 - \beta_0} - c_4 \mathcal{L}_\gamma$

$$= -3 \cdot \frac{\mathcal{L}_\gamma}{4d_0} + 4 \cdot \frac{\mathcal{L}_\gamma}{5d_0} - c_4 \mathcal{L}_\gamma = \Big(\frac{1}{20d_0} - c_4\Big)\mathcal{L}_\gamma$$

> 0 für $d_0 > 0$ klein.

Aus der Darstellung $\mathrm{Re}(h(\sigma_0,\chi)) = -\sum_{n\geq 1} \Lambda(n) n^{-\sigma_0} \chi_0(n) \cdot (3 + 4\cos(\theta_n) + \cos(2\theta_n))$ mit
$\chi(n) e^{-i\gamma_0 \log(n)} = \cos(\theta_n) + i\sin(\theta_n)$ erhalten wir $\mathrm{Re}(h(\sigma_0,\chi)) \leq 0$, was für hinreichend kleine d_0
im ↯ zu vorigem steht. Dies zeigt die behauptete Nullstellenfreiheit.

- Es sei nun $s = \sigma + it$ mit $\sigma \geq 1 - \frac{c_0}{\mathcal{L}}$. Nach Lemma 10.7 (ii) haben wir

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = \frac{E(q,\chi)}{s-1} - \sum_{\substack{\rho,\, L(\rho,\chi)=0 \\ |\mathrm{Im}(\rho)-t| \leq 1}} \frac{1}{s-\rho} + O_m(\mathcal{L}),$$

und laut eben gezeigter Nullstellenfreiheit
haben wir $\frac{1}{|s-\rho|} = O(\mathcal{L})$. ⌜Denn $L(s,\chi) \neq 0$ für $\sigma \geq 1 - \frac{2c_0}{\mathcal{L}}$ zeigt $\mathrm{Re}(\rho) < 1 - \frac{2c_0}{\mathcal{L}}$,
aber $\sigma > 1 - \frac{c_0}{\mathcal{L}} \Rightarrow |s-\rho| \gg \mathcal{L}^{-1}$.⌟ Die Anzahl der Summanden ist laut 10.7 (i)
nun $\ll N(t+1,\chi) - N(t,\chi) = O(\mathcal{L})$, es folgt der Zusatz über $\frac{L'}{L}$.

Zu (ii): OE sei $\chi \neq \chi_0$, da $L(s,\chi_0)$ in $s=1$ einen Pol 1. Ordnung hat.
Angenommen, $s_1 = \beta_1 + i\gamma_1$ sei Nullstelle der Ordnung $m_1 \geq 1$ von $L(s,\chi)$, wobei $\gamma_1 = \frac{d_1\delta}{\log(q)}$ mit $d_1 \geq 1$ und $\beta_1 = 1 - \frac{d_2\delta}{\log(q)}$ gelte. Setze $\sigma_1 := 1 + \frac{4d_2\delta}{\log(q)}$,

und $\mathcal{L}_{\gamma_1} = \log(q) + \log(\gamma_1 + 2) \ll \log(q) = \mathcal{L}$.

Wende nun Lemma 4.5 an mit $s_1 = \sigma_1 + i\gamma_1$, $r = \frac{1}{2}$, $f(s) = L(s,\chi)$,
und mit $s_1' = \sigma_1 + 2i\gamma_1$, $r = \frac{1}{2}$, $f(s) = L(s,\chi^2)\cdot(s-1)$ an. ($\chi^2 = \chi_0$)

Dies ergibt $-\mathrm{Re}\left(\frac{L'}{L}(\sigma_1 + i\gamma_1, \chi)\right) < c_5\mathcal{L} - \frac{1}{\sigma_1 - \beta_1}$ [wegen Nst. s_1 nahe s_1 laut Ann.]

bzw. $-\mathrm{Re}\left(\frac{L'}{L}(\sigma_1 + 2i\gamma_1, \underbrace{\chi^2}_{=\chi_0}) + \frac{1}{\sigma_1 - 1 + 2i\gamma_1}\right) < c_6\mathcal{L}$, [bei 2. Version]

d.h. $-\mathrm{Re}\left(\frac{L'}{L}(\sigma_1 + 2i\gamma_1, \chi^2)\right) < c_6\mathcal{L} + \mathrm{Re}\frac{1}{\sigma_1 - 1 + 2i\gamma_1}$.

Ann.: $d_1 \geq 5d_2$

Mit $\gamma_1 = \frac{d_1\delta}{\mathcal{L}}$ folgt $\mathrm{Re}\frac{1}{\sigma_1 - 1 + 2i\gamma_1} = \frac{\sigma_1 - 1}{(\sigma_1-1)^2 + 4\gamma_1^2} = \frac{\sigma_1 - 1}{(\sigma_1-1)^2 + 4\delta^2/\mathcal{L}^2} = \frac{d_2}{4d_2^2 + d_1^2}\cdot\frac{\mathcal{L}}{\delta} \leq \frac{\mathcal{L}}{29 d_2\delta}$

wir erhalten $\mathrm{Re}(h(\sigma_1,\chi)) \geq -\frac{3}{\sigma_1 - 1} + \frac{4}{\sigma_1 - \beta_1} - \mathrm{Re}\frac{1}{\sigma_1 - 1 + 2i\gamma_1} - c_7\mathcal{L} = -\frac{3\mathcal{L}}{4d_2\delta} + \frac{4\mathcal{L}}{5d_2\delta} - \frac{\mathcal{L}}{29d_2\delta} - c_7\mathcal{L}$

$= \underbrace{\left(-\frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{1}{29}\right)}_{>0}\frac{\mathcal{L}}{d_2\delta} - c_7\mathcal{L}$

was wieder im ↯ zu $\mathrm{Re}(h(\sigma_1,\chi)) \leq 0$ für hinreichend kleine d_2 steht.

Also folgt $d_2 > \frac{1}{5}d_1 \geq \frac{1}{5}$ und $\beta_1 = 1 - \frac{d_2\delta}{\log(q)} < 1 - \frac{d_1\delta}{5\log(q)}$, nimm $R = \frac{5}{d_1}$.

- Der Zusatz über $\frac{L'}{L}$ folgt genau wie in (i).