Vorlesung Kryptographie

WiSe '23/'24, hhu
K. Halupczok

K5: ElGamal-Verschlüsselung und -Signatur

Stichworte: ElGamal-Verschlüsselung und ElGamal-Signatur auf Untergruppe $\langle x \rangle$ einer beliebigen abelschen Gruppe $(G,+)$, Hashfunktion, Motivation: nimm für $(G,+)$ die Gruppe einer elliptischen Kurve

---

5.1. **Einleitung:** Durch leichte Variation des DH-Schlüsselvereinbarungsprotokolls 4.12 erhält man ein asymmetrisches Verschlüsselungsverfahren, nämlich die El-Gamal-Verschlüsselung, bei dem der von Bob erzeugte Schlüssel stets derselbe ist, aber der von Alice bei jeder Kommunikation neu generiert werden muss. Beim ElGamal-Signaturverfahren wird eine Unterschrift für eine Nachricht mit denselben privaten und öffentlichen Schlüsseln wie beim ElGamal-Verschlüsselungsverfahren erzeugt. Allerdings kann man anhand der Unterschrift nicht die Nachricht zurückgewinnen.
Es gibt viele Varianten des ElGamal-Signaturverfahrens. Eine besonders effiziente Variante geht auf Schnorr zurück und wurde in den USA als Norm für die Erzeugung digitaler Unterschriften festgesetzt, bekannt unter dem Namen "DSS" = "Digital Signature Standard".
Für die Erläuterung des ElGamal-Signaturverfahrens benutzen wir hier etwas allgemeiner eine Hash-Funktion, das ist z.B. die Potenzierung einer Primitivwurzel mod p. Dabei stellt sich ganz praktisch die Frage nach Auffinden von Primitivwurzeln mod p. Falls in $\mathbb{Z}_p$ genug PWen vorhanden sind, wie etwa im Fall von Sophie-Germain-PZen p, können solche leicht durch "Probieren" ermittelt werden, vgl. 5.8.
Heutzutage nimmt man für elektronische Unterschriften anstelle UGen von $\mathbb{Z}_n^\times$ auch UGen von elliptischen Kurven. Das darauf beruhende Verfahren heißt ECDSA und wird in K26 behandelt.

5.2. **ElGamal-Verschlüsselung** (entwickelt von T. ElGamal)

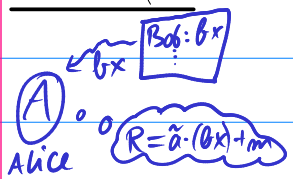
Allen Teilnehmern bekannt sei eine abelsche Gruppe $(G,+)$ und ein Gruppenelement $x \in G$ von (großer) Ordnung $n = ord(x)$.
Jeder Nutzer wählt eine Zufallszahl $d \in \{1,\dots,n-1\}$ als privaten Schlüssel und erzeugt einen öffentlichen Schlüssel $d \cdot x$:

	geheim	öffentlich
Alice	a	ax
Bob	b	bx

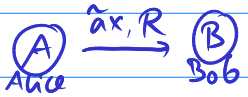
5.3. Alice möchte eine geheime Botschaft $m \in G$ an Bob schicken.

Das Verfahren geht wie folgt:

Schritt (1.) Alice wählt eine Zufallszahl $\tilde{a} \in \{1,\dots,n-1\}$ und berechnet $\tilde{a} \cdot x$.
Alice besorgt sich Bobs öffentlichen Schlüssel bx und berechnet $R = \tilde{a} \cdot (bx) + m$.



Schritt (2.) Alice schickt $\tilde{a}x$ und R an Bob.



Schritt (3.) Bob berechnet $b \cdot (\tilde{a}x) = \tilde{a} \cdot (bx)$
und die Nachricht durch $R - b \cdot (\tilde{a}x) = m$.

5.4. Ein Unbefugter, der die Daten $G, x, n, bx, \tilde{a}x$ kennt und R abgehört hat, kann m genau dann berechnen, wenn er ein Diffie-Hellman-Problem 4.13 lösen kann (d.h. das Element $\hat{a}b \cdot x \in G$ berechnen.)

5.5. Alice könnte $\tilde{a} = a$ wählen. Für die Sicherheit dieses Verfahrens ist es aber wichtig, dass sie bei jeder ihrer Nachrichten ein neues $\tilde{a}$ wählt:
Sonst könnte ein Unbefugter, der die Übertragungen $\tilde{a}x, R_1 = \hat{a}(bx) + m_1$ und $\hat{a}x, R_2 = \hat{a}(bx) + m_2$ abhört und schon die Nachricht m_1 kennt, über $R_2 - R_1 + m_1 = (m_2 - m_1) + m_1 = m_2$ auch m_2 berechnen.

5.6 Digitale Unterschriften und die ElGamal- bzw. DSA-Signatur

Geg. wieder eine abelsche Gruppe $(G,+)$, $x \in G$ mit $n = \mathrm{ord}(x)$ groß.
Alice will eine Nachricht m an Bob digital unterschreiben.
Wieder hat sie einen geheimen Schlüssel $a \in \{1,\dots,n-1\}$
und einen öffentlichen Schlüssel $ax \in G$.

5.7 Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller möglichen Nachrichten (etwa beliebig lange Folgen von 0 und 1), und geg. sei eine Funktion $h: \mathcal{M} \to \{0,1,\dots,n-1\}$, deren Werte $h(m)$ für $m \in \mathcal{M}$ leicht zu berechnen sind, und die die folgenden beiden Eigenschaften hat:

(i) Es ist praktisch unmöglich, Urbilder unter h zu berechnen, d.h. zu $d \in \{0,1,\dots,n-1\}$ ein $m \in \mathcal{M}$ zu finden mit $h(m) = d$.

(ii) h ist kollisionsresistent, das bedeutet, dass es praktisch unmöglich ist, zwei verschiedene Elemente $m, m' \in \mathcal{M}$ mit $h(m) = h(m')$ zu finden.

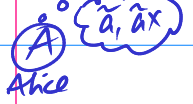
Def.: Eine solche Funktion heißt eine Hashfunktion.

5.8 Bsp.: Sei p prim, z.B. mit $2^{1023} < p \leq 2^{1024}-1$, und g ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe $\mathbb{Z}_p^\times$, d.h. $\langle g \rangle = \mathbb{Z}_p^\times$. Dann ist nach heutigem Wissen $h: \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$, $h(z) = g^z \bmod p$ eine Hashfunktion. Das ab 5.10 beschriebene Verfahren kann dann mit $G = \mathbb{Z}_p^\times$, $x = g$ durchgeführt werden. In der Praxis nimmt man für p eine Sophie-Germain-PZ, d.h. p prim mit $\frac{p-1}{2}$ auch prim, denn dann ist die Anzahl der Erzeuger / PWen laut EZ 9.7 gleich $\varphi(\varphi(p)) = \varphi(p-1) = \varphi(2 \cdot \frac{p-1}{2}) \overset{p \neq 5}{=} \varphi(2) \cdot \varphi(\frac{p-1}{2}) = \varphi(\frac{p-1}{2}) = \frac{p-1}{2} - 1$, d.h. etwa jedes zweite Element ist ein Erzeuger/eine PW, und daher ist es (algorithmisch) leicht, eine PW zu finden: durch zufällige Wahl mit einer 50%-Chance, also gelingt die PW-Wahl in der Praxis erwartungsgemäß mit ca. 2 Versuchen. Ob $g \neq \pm 1$ PW mod p ist, lässt sich mit $g^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1 \ (p)$ schnell testen, sofern p eine S.G.-PZ (mit $\frac{p-1}{2}$ prim) ist. ⌋

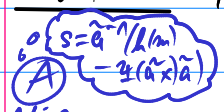
5.9. Öffentlich zugänglich seien die Daten $(G,+)$, $x \in G$, $n = \mathrm{ord}(x)$, h und $ax \in G$, sowie eine Bijektion $\Psi : \langle x \rangle \to \{0,1,\dots,n-1\}$, deren Werte effektiv berechenbar seien (in der Praxis reicht eine Fkt., deren Urbildmenge $\Psi^{-1}(k)$ von jedem $k \in \{0,\dots,n-1\}$ klein ist).

5.10. Nun das Verfahren zur Signatur, wie Alice ihre Nachricht $m \in M$ unterschreiben kann:

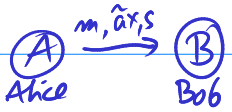
Schritt (1.) Alice wählt eine Zufallszahl $\tilde{a} \in \{1,\dots,n-1\}$ mit $ggT(\tilde{a},n)=1$ und berechnet das Gruppenelement $\tilde{a}x \in G$.



Schritt (2.) Alice berechnet das Inverse $\tilde{a}^{-1}$ von $\tilde{a}$ in $\mathbb{Z}_n$ (euklidischer Algo!) sowie $s = \tilde{a}^{-1}(h(m) - \Psi(\tilde{a}x)\cdot a)$ in $\mathbb{Z}_n$.



Schritt (3.) Alice schickt die Nachricht m und ihre Unterschrift $\tilde{a}x, s$ an Bob.



Schritt (4.) Bob berechnet $\Psi(\tilde{a}x)\cdot ax + s\tilde{a}x$ sowie den Hashwert $h(m)$.

(Verifikation) Bob akzeptiert die Unterschrift als echt, wenn $\Psi(\tilde{a}x)\,ax + s\tilde{a}x = h(m)\cdot x$ in G ist, was nur stimmt, wenn $\Psi(\tilde{a}x)\,a + s\tilde{a} \equiv h(m) \bmod n$ gewährleistet ist, da ja $n = \mathrm{ord}(x)$ in G gilt.

5.11. Bem.: Kann hier ein Unbefugter die Unterschrift von Alice fälschen? Dazu müsste er s, kx finden mit $\Psi(kx)\,ax + s\cdot kx = h(m)\,x$ für ein beliebiges k anstelle $\tilde{a}$. Er würde kx berechnen und müsste s passend wählen, wofür ein DL-Problem in $\langle x \rangle \subseteq G$ zu lösen wäre, denn a kennt er nicht.

5.12. Bem.: Auch hier ist für die Sicherheit des Verfahrens nötig, dass Alice für jede Unterschrift ein neues $\tilde{a}$ wählt: erzeugt Alice zwei Unterschriften $(\tilde{a}x, s_1)$ für m_1 und $(\tilde{a}x, s_2)$ für m_2, ist $s_2 - s_1 \equiv \tilde{a}^{-1}(h(m_2) - h(m_1)) \bmod n$. Wenn $h(m_2) - h(m_1)$ inv'bar in $\mathbb{Z}_n$ ist, kann der Unbefugte $\tilde{a} \bmod n$ berechnen. Wegen $\Psi(\tilde{a}x)\,a \equiv h(m_1) - s_1\tilde{a} \bmod n$ ist dann auch a berechenbar, falls $\Psi(\tilde{a}x)$ inv'bar in $\mathbb{Z}_n$ ist.

5.13. Bem.: Wozu eine Hashfunktion h? Diese ist zur Sicherheit erforderlich:

• Könnte man leicht Urbilder unter h berechnen, ist das Unterschriftenfälschen einfach: Der Unbefugte wählt $j \in \mathbb{Z}$ beliebig und berechnet $r = jx - ax$, $s = \psi(r)$ und bestimmt m (nicht von Alice!) mit $h(m) \equiv \psi(r) j \bmod n$. Dann ist r, s eine für Bob verifizierbare Unterschrift der falschen Nachricht m, denn es gilt:

$$\psi(r)ax + \underbrace{\psi(r)}_{s}\underbrace{(jx - ax)}_{r} = \psi(r)jx = h(m) \cdot x.$$

• Wäre h nicht kollisionsresistent und ein Auffinden von $m' \neq m$ mit $h(m) = h(m')$ leicht, kann man Alice' Unterschrift unter m' fälschen, wenn man eine gültige Unterschrift $\tilde{a}x, s$ für m hat wegen

$$\psi(\tilde{a}x)\,ax + s\tilde{a}x = h(m) \cdot x = h(m') \cdot x.$$

5.14. Bem.: Bob muss sicher sein, dass Alice öffentlicher Schlüssel ax auch wirklich von Alice stammt und nicht von einem Unbefugten gefälscht wurde. Man löst das Problem, indem sich jeder Nutzer bei einer "Certification Authority", kurz CA, registrieren lässt. Bob würde von dieser eine "beglaubigte Kopie" von Alice öffentlichen Schlüssel erhalten; Einzelheiten vgl. Fachliteratur, z. B. Kap. 13 in [Menezes, van Oorschot, Vanstone].

5.15. Das beschriebene Verfahren heißt ElGamal-Signatur-Verfahren. Eine rechnerisch vorteilhafte Variante heißt DSA (= digital signature algorithm). Das mit der Gruppe einer elliptischen Kurve realisierte DSA-Verfahren heißt ECDSA (= elliptic curve digital signature algorithm), wir behandeln es genauer in K26.

5.16. Motivation: Eine auf Koblitz/Miller zurückgehende Idee ist nun, dass für die ElGamal-Verfahren eine beliebige zyklische Gruppe $\langle x \rangle$ verwendbar ist, wie etwa die, die von Punkten auf elliptischen Kurven erzeugt werden. Da für (geeignete) elliptische Kurven das DL-Problem bzw. DH-Problem schwieriger als für $\mathbb{Z}_n^\times$ ist, gilt diese Art von Verschlüsselungstechnik heute als besonders sicher und wird vielfältig industriell angewendet; wegen der kleineren Schlüssellänge ist diese rechnerisch praktischer als z. B. RSA, vgl. K25.