Noch zu A7: Hauptsatz über endl. erz. ab. Gruppen:

Jede endl. erz. ab. Gr. A ist eind. (bis auf Reihenfolge der Summanden) von der Form

$$A \underset{6.22}{\cong} \underbrace{F}_{\substack{\text{frei:}\\ F \cong A/T(A)}} \oplus \underbrace{T(A)}_{\text{Torsionsteil}} \underset{7.12}{\cong} \mathbb{Z}^m \oplus \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} T(A)_p$$

$$\underset{7.14}{\cong} \mathbb{Z}^m \oplus \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} \bigoplus_{i=1}^{n_p} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{e_i(p)}$$

7.12. **Satz:** Jede ab. Torsionsgruppe A ist direkte Summe ihrer p-Teile: $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p$

p-Gruppen: alle El. davon haben p-Potenz als Ordnung

Bew.: * $A = \sum_{p\in\mathbb{P}} A_p$

Sei $a \in A$, $1 < \operatorname{ord}(a) = r = p_1^{e_1} \cdots p_m^{e_m}$ die PFZ (p_i pw verschieden)

Sei $r_i := p_i^{-e_i} r \Rightarrow \operatorname{ord}(r_i a) = p_i^{e_i}$, d.h. $r_i a \in A_{p_i}$, $e_i \geq 1$.

Da die r_i keinen gem. Teiler $\neq \pm 1$ haben,

ex. $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{Z}$ (Satz von Bézout) $1 = s_1 r_1 + \dots + s_m r_m$.

↳ Lemma A7.3

Somit $a = 1 \cdot a = (s_1 r_1 + \dots + s_m r_m) a = s_1 \underbrace{(r_1 a)}_{\in A_{p_1}} + \dots + s_m \underbrace{(r_m a)}_{\in A_{p_m}} \in \sum_{p\in\mathbb{P}} A_p$.

* Summe direkt: $A_q \cap \sum_{p\in\mathbb{P}\setminus\{q\}} A_p = 0$:

Sei $a = a_{p_1} + \dots + a_{p_m} \in A_q$, die $p_i \in \mathbb{P}\setminus\{q\}$.

Ex. $e_1, \dots, e_m$: $p_i^{e_i} a_{p_i} = 0$. Dann: $r := \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$

$\Rightarrow ra = \underbrace{ra_{p_1}}_{=0} + \dots + \underbrace{ra_{p_m}}_{=0} = 0$, Bem. 7.7: $A_q \to A_q$, $a \mapsto ra$ Autom. da $q \nmid r$

Somit: $a = 0$. $\square$

7.14. Satz: Sei $p \in \mathbb{P}$, A endl. ab. p-Gruppe ($\#A = p^e$).
Dann ist A direkte Summe zyklischer p-Gruppen $\neq 0$:

$$A = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}a_i, \quad \mathbb{Z}a_i \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{e_i},$$

$m \in \mathbb{N}$ ist eind. best., $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{N}$ (bis auf Reihenf.) eind. best.

Bew.: Ex.: VI nach $\#A$: $\#A = 1$: ✓

$\#A > 1$: Sei $a_0 \in A$ von max. Ordnung,

$$B := A/\underbrace{\mathbb{Z}a_0}_{\neq e}, \quad \pi : A \twoheadrightarrow B.$$

IV auf B: $B = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}b_i$, die $b_i \neq 0$, $\mathbb{Z}b_i \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{e_i}$.

$\overset{\text{Lemma 7.13}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, a_1, \dots, a_m \in A$: $\pi(a_i) = b_i$, $\operatorname{ord}(a_i) = \operatorname{ord}(b_i)$, $1 \le i \le m$.

Dann: $A = \bigoplus_{i=0}^{m} \mathbb{Z}a_i$: * $A = \sum_{i=0}^{m} \mathbb{Z}a_i$ [Sei $a \in A \Rightarrow \pi(a) = \sum_{i=1}^{m} s_i b_i$. $a - \sum_{i=1}^{m} s_i a_i \in \ker \pi = \mathbb{Z}a_0$ $\Rightarrow a = \sum_{i=1}^{m} s_i a_i + s_0 a_0$]

* Ferner direkt: $\forall j$: $\mathbb{Z}a_j \cap \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \mathbb{Z}a_i \overset{!}{=} 0$

Sei $a \in$ l.S. Dann: $-r_j a_j = \sum_{i \neq j} r_i a_i$

$\Rightarrow r_0 a_0 + r_1 a_1 + \dots + r_m a_m = 0 \Rightarrow 0 = \pi(r_0 a_0 + \dots + r_m a_m)$

$\Rightarrow 0 = \underbrace{\pi(r_0 a_0)}_{=0} + r_1 b_1 + \dots + r_m b_m \Rightarrow r_i b_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, m$

$\Rightarrow \operatorname{ord}(a_i) = \operatorname{ord}(b_i) \mid r_i \Rightarrow r_i a_i = 0$

$\Rightarrow r_0 a_0 = 0$.

$$A = \bigoplus_{i=0}^{m} \mathbb{Z}a_i \to \underbrace{\mathbb{Z}a_i}_{\text{zykl., dieselbe Ordnung wie } b_i} \cong \mathbb{Z}b_i \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{e_i}.$$

Eind.: VI nach $\#A$: $\#A = 1$: $A = \mathbb{Z}e \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^0 \cong 0$ ✓

$\#A > 1$: Sei $A = \bigoplus_{i=1}^{m} C_{p^{k_i}}$, $C_{p^{k_i}} = \mathbb{Z}a_i \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{k_i}$

Sei $0 = k_i = 1 \Leftrightarrow 1 \le i < s$. Betr. $A \to pA$, $a \mapsto pa$.

$$\Rightarrow pA = \underbrace{\{0\} \oplus \dots \oplus \{0\}}_{s-1 \text{ viele}} \oplus \underbrace{C_{p^{k_s - 1}} \oplus C_{p^{k_{s+1} - 1}} \oplus \dots \oplus C_{p^{k_m - 1}}}_{=: B,\ \text{IV: eind.}}$$

$(C_p \oplus \dots \oplus C_p =)$ $\hookrightarrow C_{p^{a_1}} \oplus \dots \oplus C_{p^{a_{s-1}}}$ eind., $\#A, \#B \Rightarrow s$ fest. $\rightsquigarrow$ eind. $\square$

S_3: kleinste nichtab. Gr.

A8: Auflösbare Gruppen

8.1. $P(x)=0$
$x^2+px+q=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\ldots$ } → später in A24/A25
"auflösbar"

Zeigen: S_n auflösbar $\Leftrightarrow n \leq 4$
endl. p-Gruppe auflösbar

8.2. Def.: Sei G Gruppe. Eine Folge $\mathfrak{N}: G=G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_r = e$ von UGen in G heißt Normalreihe für G (Kurz: NR),
falls: $\forall i$: G_i ist NT von G_{i-1}, $1 \leq i \leq r$.
Die Gruppen G_{i-1}/G_i heißen Faktorgruppen von $\mathfrak{N}$.
"Faktoren"

8.3. Def.: G heißt auflösbar, falls es eine Normalreihe für G mit lauter abelschen Faktoren G_{i-1}/G_i gibt.

8.4. Bsp.: Jede ab. Gr. G ist auflösbar: $\mathfrak{N}: G=G_0 \trianglerighteq G_1 = e$
$\rightarrow G_0/G_1 = G/e \cong G$ ab. ✓

8.5. Bsp.: S_3 ist auflösbar: $\mathfrak{N}: S_3 \trianglerighteq A_3 \trianglerighteq e$,
die Faktoren sind: $S_3/A_3 \cong \{\pm 1\} \cong C_2$ zykl. der Ordn. 2 ✓
$A_3/e \cong A_3$ zyklisch Ordn. 3. ✓

8.6. Bsp.: S_4 ist auflösbar: $\mathfrak{N}: S_4 \trianglerighteq A_4 \trianglerighteq V \trianglerighteq e$,
die Faktoren sind: $\left.\begin{array}{l} S_4/A_4 \cong C_2 \\ A_4/V \cong C_3 \end{array}\right\}$ zyklisch
$V/e \cong V \cong C_2 \times C_2$ abelsch ✓

8.7. Bsp.: A_5 ist einfach (→ vgl. A5.25)
$\Rightarrow \mathfrak{N}: A_5 \trianglerighteq e$ ist einzige Normalreihe $\Rightarrow A_5$ ist nicht auflösbar.
↑ nicht abelsch

8.8. Satz: UG auflösbarer Gruppen sind auflösbar.

Bew.: Sei $H \subseteq G$ UG, $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_r = e$ NRe mit ab. Faktoren.

Dann $H = H \cap G \supseteq H \cap G_1 \supseteq \dots \supseteq H \cap G_r = e$ NR mit ab. Faktoren für H,

denn: $\varphi : H \cap G_{i-1} \hookrightarrow G_{i-1} \twoheadrightarrow G_{i-1}/G_i$

hat Kern $H \cap G_i$

und $H \cap G_{i-1}/H \cap G_i$

Situation:

$$\begin{tikzcd} H \cap G_{i-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "\ker\varphi = H \cap G_i"'] & G_{i-1}/G_i \\ \underbrace{H \cap G_{i-1}/H \cap G_i}_{} \arrow[ur, dashed, "\text{inj.}"'] & \end{tikzcd}$$

laut Hom. satz

$\Rightarrow H \cap G_{i-1}/H \cap G_i \cong$ zu UG von $\underbrace{G_{i-1}/G_i}_{\text{ab.}}$, ist ab. $\square$

8.9. Satz: Sei G Gr., $N \subseteq G$ NT in G. Dann:

G auflösbar $\Leftrightarrow$ <u>N und G/N auflösbar.</u>

Bew.: „$\Rightarrow$": Sei $\mathfrak{N} : G = G_0 \trianglerighteq \dots \trianglerighteq G_r = e$ NR mit ab. Faktoren für G.

Betr. $\pi : G \twoheadrightarrow G/N =: \bar{G}$, z.z.: Faktoren bleiben abelsch!

Haben: $\underbrace{\bar{G}_{i-1}/\bar{G}_i}_{\text{ab.}} \cong \underbrace{G_{i-1}/G_i}_{\text{ab.}}$ nach 2. Isom. satz A4.22. (ii),

$\Rightarrow$ also: G/N auflösbar.

Ferner: N auflösbar nach 8.8. ✓

„$\Leftarrow$": Seien $\mathfrak{N} : N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \dots \supseteq N_r = e$.

$\mathfrak{N}' : \bar{G} = \bar{G}_0 \supseteq \bar{G}_1 \supseteq \dots \supseteq \bar{G}_s = \bar{e} \; (= eN = N)$

NR für N und $\bar{G} := G/N$ mit ab. Faktoren. Sei $\pi : G \to \bar{G} = G/N$

Dann: $G = \underbrace{\pi^{-1}\bar{G} \supseteq \pi^{-1}\bar{G}_1 \supseteq \dots \supseteq \pi^{-1}\bar{G}_s}_{\text{ist NR mit ab. Faktoren,}} = \underbrace{N \supseteq N_1 \supseteq \dots \supseteq N_r = e}_{\text{NR für } N}$ ✓

denn: $\pi^{-1}\bar{G}_{i-1}/\pi^{-1}\bar{G}_i \cong \bar{G}_{i-1}/\bar{G}_i$ ab. $\square$

8.10 <u>Kor.</u>: S_n auflösbar $\Leftrightarrow n \leq 4$.

<u>Bew.</u>: „$\Leftarrow$" ✓, „$\Rightarrow$": Sei $n \geq 5 \overset{A5.25.}{\Leftrightarrow} A_n$ nicht auflösbar,

da A_n einfach und nicht abelsch

$\Leftrightarrow S_n$ nicht auflösbar,

$\underset{8.9.}{\Uparrow}$ denn $C_2 = \{\pm 1\} \cong S_n / A_n$ abelsch/auflösbar

$G = S_n, N = A_n$

□

8.11. <u>Satz</u>: Sei $p \in \mathbb{N}$ prim, G endl p-Gr., d.h. $\# G = p^e$. Dann ist G auflösbar.

<u>Bew.</u>: VI nach $\# G =: n$: $n = 1$: ✓

$n > 1$: Nach A3.18: G hat Zentrum $Z(G) \neq e$.

$Z(G)$ ist ab., also auflösbar.
$G / Z(G)$ ist nach IV auflösbar. $\Big\} \overset{8.9}{\Rightarrow} G$ ist auflösbar.

□

8.12. <u>Satz</u>: Jede endl. auflösbare Gr. hat eine NRe aus zykl. Faktoren von Primzahlordnung. } Weitere Verfeinerung von NRen

<u>Bew.</u>: VI nach $n := \# G$: $n = 1$ ✓

$n > 1$: Sei $G' \subsetneq G$ NT mit G/G' abelsch.

Wähle max. UG $\bar{G}_0$ von $\bar{G} = G/G'$ mit $\bar{G}_0 \neq \bar{G}$

[ev. $\bar{G}_0 = e$, benutzen $\bar{G} \neq e$]

Dann: $\bar{G} / \bar{G}_0$ ist zykl. von Primzahlordnung

(abelsch $\neq e$, H.S. + $\bar{G}_0$ maximal:

HS $\rightsquigarrow \bar{G} = C_{p_1^{e_1}} \oplus W$

[p_1 die kl. PZ, darin: zykl. UG. der Ordn. $p_1^{e_1 - 1}$ d.h. $C_{p_1^{e_1-1}} \rightsquigarrow \underbrace{C_{p_1^{e_1}}}_{=\langle a \rangle} / \underbrace{C_{p_1^{e_1-1}}}_{\langle a^{p_1} \rangle} \cong C_{p_1}$

$\rightarrow$ nimm $\bar{G}_0 := C_{p_1^{e_1-1}} \oplus W \Rightarrow \bar{G}/\bar{G}_0 = C_{p_1}$ ✓

Sei $\pi : G \twoheadrightarrow \bar{G} = G/G'$ die Proj. mod G'.

Dann:

$$\pi^{-1} \bar{G} = G \underset{\uparrow}{\supsetneq} G_1 := \pi^{-1} \bar{G}_0 \underbrace{\supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq e}_{\text{nach IV} \Rightarrow \text{alle Faktoren zykl. von Primzahlordn.}}$$

Faktor $G/G_1 \cong \bar{G}/\bar{G}_0$ zykl. von Primzahlordnung

□