Weiter zu A6: $\to$ ab. Gruppen, add. geschrieben

- $A = \sum_i B_i = \langle \bigcup_i B_i \rangle$
- Summe heißt direkt, wenn zusätzlich $\forall j: B_j \cap \sum_{i \neq j} B_i = 0$
- dir. Summe $\cong$ dir. Produkt bei endl. viele Summanden $\to A = \mathbb{Z}a_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}a_n$
- F frei $:\Leftrightarrow$ (i) $F = \bigoplus_i \underbrace{\mathbb{Z}a_i}_{\text{UG von } F}$, $a_i \in F$

  (ii) $\forall i: \mathbb{Z}a_i \cong \mathbb{Z}$, d.h. die a_i haben ∞ Ordnung

  Die $(a_i)_{i \in I}$ heißen Basis von F.
- Def.: A heißt endlich erz. $:\Leftrightarrow A = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{Z}a_i = \langle \{a_1, \ldots, a_m\} \rangle$ für ein $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in A$

  bzw. $A = \mathbb{Z}a_1 + \mathbb{Z}a_2 + \ldots + \mathbb{Z}a_n$

6.12. Satz: Je zwei Basis einer endl. erz. freien ab. Gruppen haben gleichviele El.

Bew.: Sei $F = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}a_i = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{Z}b_j$, die $a_i, b_j \neq 0$, $p \in \mathbb{N}$ prim.

$$\overset{6.7}{\Rightarrow} p\left(\bigoplus_{i=1}^{a} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{a} pA_i \quad \text{und} \quad A/pA \cong \prod_{i=1}^{a} A_i/pA_i,$$

also:
$$F/pF \cong \prod_{i=1}^{m} \underbrace{\mathbb{Z}a_i/p\mathbb{Z}a_i}_{\cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \cong \prod_{j=1}^{n} \underbrace{\mathbb{Z}b_j/p\mathbb{Z}b_j}_{\cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$$

Somit: $\# F/pF = p^m = p^n \Rightarrow m = n$. $\square$

6.13. Def.: Rang von F (endl. erz. fr. ab. Gr.): $\operatorname{rg} F := \# A$ (A Basis von F)

6.14. Satz: Jede UG einer endl. erz. freie ab. Gr. F vom Rang n ist frei vom Rang $\leq n$.

Bew.: $A \subseteq F$ UG, F frei vom Rang n. VI nach n: $n = 0$: $\{0\}$ ist frei, Basis $\emptyset$

$n > 0$: Basis $a_1, \ldots, a_n$ in F: $F = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}a_i$, und $\pi: F \to \mathbb{Z}$, $\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \mapsto r_n$.

$\Rightarrow \ker \pi = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}a_i = F'$ frei vom Rang $n-1$.

Nach IV ist $A' := F' \cap A$ frei vom Rang $\leq n-1$.

Fall 1: $A = A'$: ✓

Fall 2: $A \neq A'$: $\pi(A) = \mathbb{Z}s$ mit $0 \neq s \in \mathbb{Z}$ [$\pi(A) \leq \mathbb{Z}$, Bsp. A2.6]

Wähle Basis $b_1, \dots, b_m$ von A' $(m \leq n-1)$

sowie $b \in A$ mit $\pi(b) = s$.

Beh.: $b_1, \dots, b_m, b$ ist Basis von A [$m+1 \leq n$ ✓]

erz.: $A = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{Z} b_i + \mathbb{Z} b$:

Sei $a \in A$, $\pi(a) = rs = r\pi b$ für ein $r \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a - rb \in F' \cap A = A' \Rightarrow a - rb = \sum_{i=1}^{m} r_i b_i$ ✓

frei: Sei $\sum r_i b_i + rb = 0$.

$\Rightarrow \pi(\ \ '' \ \ ) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} r_i \underbrace{\pi b_i}_{=0} + r \underbrace{\pi(b)}_{=s} = rs = 0$

$\underset{s \neq 0}{\Rightarrow} r = 0 \underset{\uparrow}{\Rightarrow}$ alle $r_i = 0$.

$b_1, \dots, b_s$ Basis von A' ✓ □

6.15 Kor.: UG endl. erz. ab. Gr. sind endl. erz.

Bew.: Sei $B \subseteq A = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z} a_i$ UG. $\overset{6.11}{\Rightarrow}$ Sei $\varphi: F \twoheadrightarrow A$ Surj. Hom. (frei ab. von endl. Rang)

$F \supseteq \varphi^{-1}(B)$, $A \supseteq B$

$\overset{6.14}{\Rightarrow} \varphi^{-1} B$ frei von endl. Rang, insb. endl. erz. $\Rightarrow \varphi(\varphi^{-1}B) = B$ endl. erz. □

6.16. Def.: Eine ab. Gr. heißt torsionsfrei, wenn alle $a \in A \setminus \{0\}$ unendl. Ordnung haben

6.17. Bsp.: $\mathbb{Q}$ ist bzgl. $+$ ist torsionsfrei ($rq = 0 \Leftrightarrow r = 0$ für $q \neq 0$), aber nicht frei.
[...]

6.18. Bsp.: Freie ab. Gruppen sind torsionsfrei.

Bew.: Sei F frei, (a_i) Basis: $F = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} a_i$

Sei $a := \sum_{i=1}^{n} r_i a_i \neq 0$, sei $r \in \mathbb{N}$.

Ann.: $0 = ra = \sum_{i=1}^{n} (rr_i) a_i \Rightarrow rr_i = 0 \Rightarrow r = 0$ □

6.19 Satz: Endl. erz. torsionsfreie ab. Gr. sind frei.

Bew.: $A = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z} a_i$ torsionsfrei, $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ max. mit $B = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} a_i \subseteq A$ frei, Basis $(a_i)_{i \in I}$

Beh.: $\forall j \leq n \; \exists r_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : r_j a_j \in B$ ⌜Max. von I⌟

Setzen $r := \prod r_j \neq 0 \Rightarrow \forall j \leq n : r a_j \in B$, also $rA \subseteq B$.

$\varphi : A \to B$

$a \mapsto ra$, ist inj. (da A torsionsfrei) $\Rightarrow A \cong \varphi(A) = rA \subseteq B$

frei nach 6.14. □

6.20. Def.: Sei A eine ab. Gr., $T(A) := \{a \in A ; \exists r \in \mathbb{Z} : (r \neq 0 \text{ und } ra = 0)\} \subseteq A$

⌜alle a endl. Ordnung und 0

heißt Torsionsteil von A.

6.21. Lemma: $T(A)$ ist UG von A. (NT ✓, da A ab.)

Bew.: $a, b \in T(A) \Rightarrow ra = 0 = sb \Rightarrow rs(a-b) = 0 \Rightarrow a - b \in T(A)$

$rs \neq 0$ □

6.22. Satz: Jede endl. erz. ab. Gr. A ist direkte Summe $A = T(A) \oplus F$, F frei.

Bew.: Sei $\pi : A \twoheadrightarrow A/T(A) =: B$

$a \mapsto a\,T(A)$

* B ist endl. erz., da A endl. erz.
* B torsionsfrei ⌜...⌟
* $\underset{6.19}{\Rightarrow}$ B frei, seien $a_1, \dots, a_n \in A$: $\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)$ Basis von B

Setzen $F := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z} a_i$, ist frei mit Basis $a_1, \dots, a_n$ ⌜... ✓⌟

Weiter $A = T(A) \oplus F$

$T(A) \cap F = 0$, $T(A) + F = A$ ...

Haben: $F \cong B = A/T(A)$.

Haben: $\boxed{A \cong T(A) \oplus A/T(A)}$. □

A7: Endl. erz. ab. Gruppen → Klassifikation: Hauptsatz

7.2. Bem.: d heißt ggT von $r_1,\dots,r_m \in \mathbb{Z}$, falls:
(i) $\forall i: d \mid r_i$, (ii) $\forall d': (\forall i: d' \mid r_i) \Rightarrow d' \mid d$.
d ist bis auf das VZ eind. best.

7.3. Lemma: Seien $r_1,\dots,r_m \in \mathbb{Z}$, d sei $ggT(r_1,\dots,r_m)$. Dann:
$\exists \underbrace{s_1,\dots,s_m}_{\text{Bézout-Koeff.}} \in \mathbb{Z}: d = s_1 r_1 + \dots + s_m r_m$. ⌜Satz von Bézout.⌟

Bew.: * Sei $A := \mathbb{Z} r_1 + \dots + \mathbb{Z} r_m$, ist UG von $\mathbb{Z}$,
also $A = \mathbb{Z} d'$ ⌜Bsp. A6.2⌟.
Ex. $s_1,\dots,s_m \in \mathbb{Z}$: $s_1 r_1 + \dots + s_m r_m = d' \Rightarrow d \mid d'$
* $\forall i: d' \mid r_i \Rightarrow d' \mid d$ nach (ii) von 7.2.
$\Rightarrow d' = \pm d$ □

7.4. Def.: Sei A ab Gr.
* A heißt Torsionsgruppe, falls $A = T(A)$, d.h. jedes El. hat endl. Ordnung.
* Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. $A_p := \{a \in A; \exists e \in \mathbb{N}: p^e a = 0\}$ ← die El. in A, in als Ordnung eine p-Potenz besitzen.
heißt p-(Torsions-) Teil von A.

7.5. Bem.: A_p ist UG von A.
Bew.: $a, b \in A_p$, d.h. $p^e a = 0 = p^f b \Rightarrow p^{e+f}(a-b) = 0 \Rightarrow a - b \in A_p$. □

7.6. Bem.: $p^e a = 0 \Rightarrow ord(a)$ ist Potenz von p. [$na = 0 \Leftrightarrow ord(a) \mid n$]

7.7. Bem.: Sei $r \in \mathbb{Z}$, $p \nmid r$. Dann $\varphi: A_p \to A_p$
$a \mapsto ra$ ist Auto.

Bew.: inj: ✓
surj.: Sei $a \in A_p$, $ord(a) = p^e$. Nach 7.3: $1 = ggT(p^e, r) = up^e + vr$
$\Rightarrow a = 1 \cdot a = (up^e + vr) \cdot a = u \underbrace{p^e a}_{=0} + r(va) = r \cdot (va) \in \varphi(A)$. □

7.8. Bem.: Sei $A = \mathbb{Z}a \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}m$, $m = r_1 r_2$, $ggT(r_1, r_2) = 1$.

Dann: $\mathbb{Z}a = \mathbb{Z}(r_1 a) \oplus \mathbb{Z}(r_2 a)$

$(\cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}r_2 \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}r_1)$

$\rightarrow$ vgl. Chin. Restsatz, A12.5

7.9. Bem.: Endl. erz. ab. Torsionsgruppen sind endlich.

Bew.: $A = \mathbb{Z}a_1 + \ldots + \mathbb{Z}a_n$, $m_i := ord(a_i) \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow A = \{r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n ;\ 0 \le r_i < m_i,\ 1 \le i \le n\}$

$\Rightarrow \# A \le \prod_{i=1}^{n} m_i$. $\square$

7.10. Bsp.: Betr. $\langle a, b \rangle$ mit $a^2 = b^2 = e$, nicht ab.: endl. erz., nicht endlich.

7.11. Def.: Ein ab. Gr. A heißt p-Gruppe ($p \in \mathbb{N}$ prim)

$:\Leftrightarrow \forall a \in A$: $ord(a)$ ist Potenz von p

$\Leftrightarrow A = A_p$

$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N};\ p \text{ prim}\}$

7.12. Satz: Jede ab. Torsionsgr. A ist dir. Summe ihrer p-Teile: $A = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$

7.13. Lemma: Bei Projektion mod $\mathbb{Z}a_0$ von $A = A_p$ (endl.), $a_0 \in A$ (maximale Ordn.)

kann als Urbild von $b \in A/\mathbb{Z}a_0$ ein $a \in A$ mit derselben Ordnung gefunden werden

7.14. Satz: Sei $p \in \mathbb{P}$, A_p endl. ab. p-Gr. ($\# A_p = p^e$). Dann ist A direkte Summe zyklischer p-Gruppen $\neq 0$: $A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}a_i$, $\mathbb{Z}a_i \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{e_i}$

$A = \bigoplus_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{e_i}}_{\text{zykl. Gr. der Ordn. } p^{e_i}}$

⋮

[Bew.: nächstes Mal]

7.15 HS über endl. erz. ab. Gr.: Jede endl. erz. ab. Gr. ist <u>eind.</u> von der Form

$$A \underset{A6.22}{=} F \oplus T(A) \underset{7.12.}{\cong} \mathbb{Z}^m \oplus \Big(\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \underbrace{(T(A))_p}\Big)$$

$$\underset{7.14}{\cong} \mathbb{Z}^m \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \Big(\bigoplus_{i=1}^{n_p} \underbrace{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{e_i(p)}}_{\text{zykl. } p\text{-Gr.}} \Big),$$

die $e_i(p) \in \mathbb{N}$.

Bsp.: * $\underbrace{\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}}_{\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^2}_{\text{frei}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^2$

* Für A mit 4 El. ex. 2 Mögl.:

$A \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ← <u>Klainsche Vierergruppe, nicht zyklisch</u>

oder $A \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ← zyklisch
