A16: Moduln: Def. & Bsp.

16.1. Einleitung: ~~K~~-VRe

"R-VRe" ⇝ R-Moduln

ab. Gruppe

in Algebra: der Modul ⇝ die Moduln

im Studium: das Modul ⇝ die Module

in E-Technik: " ⇝ "

16.2. Def.: Sei R ein Ring (mit Eins) (nicht notw. komm.).

Ein (Links-) R-Modul ist eine ab. Gruppe M (add. geschrieben) zusammen mit einer Abb. ⇝ $(M, +, 0)$

$$R \times M \longrightarrow M, \quad (a,x) \mapsto a \cdot x = ax,$$

mit $\forall a,b \in R \ \forall x,y \in M$:

(i) $a(x+y) = ax + ay$, (ii) $(a+b)x = ax + bx$,

(iii) $(ab)x = a(bx)$, (iv) $1 \cdot x = x$.

} wie bei K-VRen, nur Skalar-ring

16.3. Bsp.: (1) R Körper $\Rightarrow$ R-Modul = R-VR

(2) Jede ab. Gruppe A ist vermöge $\mathbb{Z} \times A \to A$, $(n,a) \mapsto n \cdot a$, ein $\mathbb{Z}$-Modul (und umgekehrt),

$= \underbrace{a + \ldots + a}_{n\text{-mal}}$, falls $n \in \mathbb{N}_0$

wobei für $n \geq 0$ gilt $n \cdot a = \underbrace{a + \ldots + a}_{n\text{-mal}}$,

für $-n < 0$ gilt $(-n) \cdot a := -(\underbrace{n \cdot a}_{\in A})$.

(3) R Ring $\Rightarrow$ R ist R-Modul [K^1 ist K-VR, K^n ist K-VR]

ebenso ist R^n ist R-Modul.

(4) K Körper, $R := K[T]$ Polynomring über K,

V ein K-VR, φ ein VR-Endo von V, d.h. $\varphi \in \mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V,V)$.

Für $f \in \sum_{i=0}^{m} a_i T^i \in K[T]$ ist $f(\varphi) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi^i$ ein Endo von V.

$T^2 \cdot x := \varphi^2(x) = \varphi \circ \varphi(x)$

$\hookrightarrow f(\varphi)(x) \in V$

Def.: $\underset{\in R}{f} \cdot \underset{\in V}{x} := f(\varphi)(x)$.

Damit wird V zu einem $K[T]$-Modul, wo $T \cdot x := \varphi(x)$.

(5) Sei V ein $K[T]$-Modul.

Dann ist $\varphi: V \to V$, $x \mapsto \underbrace{T\cdot x}_{=:\tilde{\varphi}(x)}$, ist ein K-VR-Endo von V. $\ulcorner \ldots \lrcorner$

<u>Also</u>: VR mit Endo φ = <u>$K[T]$-Modul</u>

16.4. Def.: Seien M, N R-Moduln.

$\varphi: M \to N$ heißt (R-Modul) <u>Homomorphismus</u>,

falls $\forall x,y \in M$ $\forall a \in R$: $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(ax) = a\,\varphi(x)$.

Analog wie bei VRen: <u>Iso-, Endo-, Epi-, Automorphismus.</u>

16.5. Bsp.: (6) $M \to N$, $x \mapsto 0$ und $M \to M$, $x \mapsto x$ sind Hom.

(7) R <u>komm.</u>, $a \in R \Rightarrow \mu_a: M \to M$, $x \mapsto a\cdot x$ (Modul-) <u>Endo</u>.

$\ulcorner \mu_a(bx) = a(bx) = (ab)x = (ba)x = b(ax) = b\cdot\mu_a(x). \lrcorner$

(8) R = Körper $\Rightarrow$ Modulhom. = lin. Abb. von VRen

(9) $R = \mathbb{Z} \Rightarrow$ Jeder Hom. ab. Gr. ist $\mathbb{Z}$-Modul-Hom.

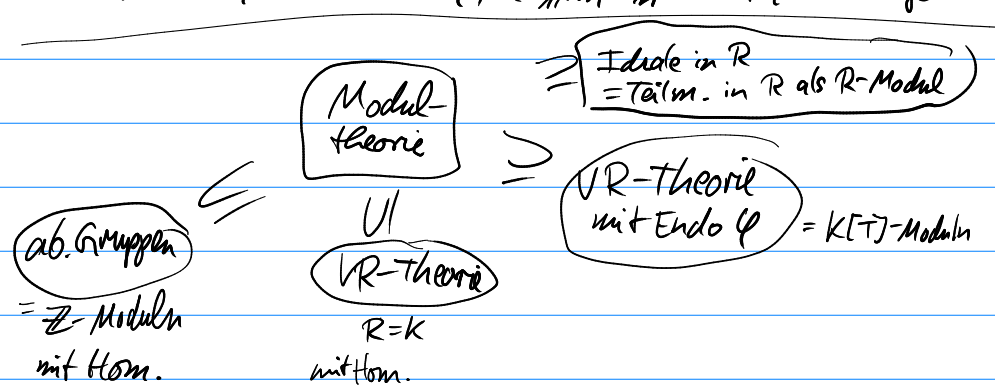
wegen $\varphi(na) = n(\varphi(a))$.

(10) $\left[R^n = \underbrace{R \times \ldots \times R}_{n \text{ mal}}\right] \rightsquigarrow M_1, \ldots, M_n$ R-Moduln, $M = M_1 \times \ldots \times M_n = \prod_{i=1}^{n} M_i$

Dann: M ist bzgl. komponentenweiser Operationen ein R-Modul, das <u>direkte Produkt</u> bzw. (äußere) direkte <u>Summe</u> <u>Produkt</u>.

Dann sind $e_i: M_i \to M$, $x_i \mapsto (0, \ldots, 0, x_i, 0 \ldots 0)$ Einbettung,

und $\pi_i: M \to M_i$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ Projektion.



16.6. **Def.:** Sei M ein R-Modul. Eine nichtleere Teilmenge $N \subseteq M$ heißt ein Teilmodul, falls $\forall x,y \in M\ \forall a \in R: x,y \in N \Rightarrow x+y,\ a\cdot x \in N$.

16.7. Bsp.: (11) $0 := \{0\}$ und M sind Teilmoduln von M.

Falls R Körper, so Teilmoduln = UVRe,

$R = \mathbb{Z}$, so Teilmoduln = Untergruppen

$R = K[T]$, V ein K-VR, φ ein Endo $\to$ V ein $K[T]$-Modul, s. (4)

so Teilmoduln = φ-invariante UVRe, d.h. $\varphi(U) \subseteq U$.

$\ulcorner N \subseteq V,\ x \in N \Rightarrow T\cdot x = \varphi(x) \in N \Rightarrow N$ ist φ-invariant$\lrcorner$

(12) $\varphi: M \to N$ Hom. Dann:

$M' \subseteq M$ Teilmodul $\Rightarrow \varphi(M') \subseteq N$ Teilmodul,

$N' \subseteq N$ " $\Rightarrow \varphi^{-1}(N') \subseteq M$ "

Insb.: $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{im}\varphi$ sind Teilmoduln.

(13) Sei R bel. Ring. Die Teilmoduln von R (als R^1 als R-Modul) sind genau die Linksideale, d.h. die Teilmengen $\emptyset \neq L \subseteq R$ mit

(i) $x,y \in L \Rightarrow x+y \in L$, (ii) $x \in L$, $a \in R \Rightarrow ax \in L$.

Falls R komm., sind die Linksideale die Ideale von R.

Falls $R = \mathbb{Z}$, sind UG = Ideale $n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

(14) $(M_i)_{i\in I}$ Familie von Teilmoduln von $M \Rightarrow \bigcap_{i\in I} M_i$ Teilmodul von M.

Jetzt: Faktormodul

16.8. Lemma: Vor.: M ein R-Modul, $N \subseteq M$ Teilmoduln.

Beh.: Die Faktorgruppe M/N ist bzgl.

$$R \times M/N \to M/N,\quad (a,\ x+N) \mapsto (ax)+N$$

ist ein R-Modul. π ist Modulhom., $\operatorname{Ker}\pi = N$.

($N \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, dashed, "\exists!\bar{\varphi}"] & P \\ M/N & \end{tikzcd}$$

$\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$

16.9. Def.: Der Modul M/N heißt Faktormodul von M modulo N

16.10. Def.: Sei M ein R-Modul, $S \subseteq M$. Dann heißt

$\langle S \rangle := \bigcap \{P \subseteq M;\ P$ Teilmoduln, $P \supseteq S\}$ der von S erzeugten Teilmoduln.

16.11. Bem.: Für $x \in M$ gilt: $x \in \langle S \rangle \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ \exists y_1,\dots,y_n \in S\ \exists a_1,\dots,a_n \in R: x = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$.

16.15. Bsp.: (15) Ein von einem El. erz. Modul heißt <u>zyklisch</u>.

Sei M ein zykl. R-Modul, $M = \langle y \rangle = Ry = \{x = ay;\ a \in R\}$ für ein $y \in M$.

Dann ist $\mu : R \to M,\ a \mapsto a \cdot y$ ein surj. R-Modul-Hom.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, two heads, "\mu"] \arrow[d, "\pi"'] & M = Ry \\ R/\ker\mu \arrow[ur, dashed, "\exists!\bar{\mu}, \text{ ist Iso!}"'] & \end{tikzcd}$$

Somit: $\underset{Ry}{M} \cong R/\ker\mu$ mit $\ker\mu = \{a \in R;\ ay = 0\} =: \mathrm{Ann}(y)$, der Annihilator von y ist. Dieser ist Linksideal von R.

[Somit sind die zyklischen Moduln (bis auf Iso) Ry genau die R-Moduln R/L mit $L \subseteq R$ Linksideal.]

16.13. Def.: Sei R I.B., M ein R-Modul.

$x \in M$ heißt Torsionsel., falls $\mathrm{Ann}(x) \neq 0$, d.h. $\exists a \in R \setminus 0 : ax = 0$.

$T(M) := \{x \in M;\ x \text{ Torsionsel.}\}$ heißt Torsionsteil von M,

M heißt Torsionsmodul, falls $T(M) = M$,

torsionsfrei, falls $T(M) = \{0\}$.

16.14. Bem.: $T(M)$ ist Teilmodul ✓

16.15. Bsp.: (16) $M/T(M)$ ist torsionsfrei ✓

(17) Sei $(M_i)_{i \in I}$ Familie von Teilmoduln von M, setze

$\sum_{i \in I} M_i := \langle \bigcup_{i \in I} M_i \rangle$. Dann: $x \in \sum_{i \in I} M_i \iff \exists n \in \mathbb{N}\ \exists i_1, \dots, i_n \in I\ \exists x_1 \in M_{i_1} \dots \exists x_n \in M_{i_n} : x = \sum_{i=1}^{n} x_i$

M heißt die (innere) direkte Summe der M_i, falls

(i) $M = \sum_{i \in I} M_i$, (ii) $\forall i \in I : M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = \{0\}$.

Notation: $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. [Bem.: $\underbrace{\bigoplus_{i=1}^{n}}_{\text{endl.!}} M_i \cong \prod_{i=1}^{n} M_i$]

<u>Kann man Moduln in direkte Summe zyklischer Moduln zerlegen?</u> → A17

16.16. Def.: Ein R-Modul F heißt <u>frei</u>, wenn $\exists\, B \subseteq F$ Teil<u>menge</u>:

(i) $\langle B \rangle = F$

(ii) $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists$ pwv $y_1, \dots, y_m \in B$

$\forall a_1, \dots, a_m \in R: \quad \sum_{i=1}^{m} a_i y_i = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0.$

Ein solches B heißt <u>Basis von F</u>.

16.18. Bsp.: (20) $R = K$ Körper, dann ist jeder K-VR <u>frei</u>.

Bem. <u>#B</u> ist eind. best., heißt <u>Rang von F</u>