

Vorlesung Algebra - Inhalt in Stichworten

SoSe'21, hhu

K. Halupczok

A0: Einleitung und Sätze in \mathbb{Z}

Stichworte: Über die Vorlesung Algebra,

Satz von der eindeutigen PFZ in \mathbb{Z} , Satz von der Division mit Rest in \mathbb{Z} ,
Erklärung des Fertcodes des Skripts,

Notationen und gängige Bezeichnungen / Abkürzungen

Teil I: GRUPPEN

A1: Gruppen: Definitionen und Beispiele

Stichworte: Def. Gruppe, neutrale und inverse Elemente, abelsche Gruppe, additiv und
multiplikativ geschriebene Gruppe, Bsp. Aut(V), GL(n,K), Perm(X), S_n , $G_1 \times \dots \times G_m$,
Gruppenordnung, Ordnung eines Gruppenelements, $\text{ord}(a)$ teilt i mit $a^i = e$

A2: Untergruppen, Faktorgruppen

Stichworte: Def. Untergruppe, Zentrum, UGen von \mathbb{Z} , die von S erzeugte UG $\langle S \rangle$,
zyklische Gruppe, Links-/Rechts-nebenklassen, Index, Satz von Lagrange, Normalteiler,
Faktorgruppe G/N , Faktorgruppen von \mathbb{Z} = Restklassengruppen, Kommutator UG

A3: Gruppenoperationen

Stichworte: Def. Gruppenoperation, Linkstranslation, Konjugation, Bahn,
Isotropiegruppe, Bahngleichung, Zentralisator, Klassengleichung,
 p -Gruppen \neq haben ein Zentrum $\neq e$, Gruppen der Ordnung p^2 sind abelsch

A4: Gruppenhomomorphismen

Stichworte: Def. Gruppenhomomorphismus, Iso-, Endo- und Automorphismus,
jede Gruppe ist \cong einer Permutationsgruppe, Homomorphiesatz / Isomorphiesätze für Gruppen,
alle zyklischen Gruppen und UGen zyklischer Gruppen

A5: Die symmetrischen Gruppen S_m

Stichworte: n -Zyklus, Transposition, elementfremde Zyklen kommutieren, Zerlegung einer Permutation in ein Produkt elementfremder Zyklen bzw. Transpositionen, Zyklentyp, Signum einer Permutation, gerade/ungerade Permutationen, alternierende Gruppe A_n , Kleinsche Vierergruppe, A_m wird von den 3-Zyklen erzeugt, einfache Gruppe, A_m ist für $m \geq 5$ einfach

A6: Direkte Summen abelscher Gruppen

Stichworte: Summe und (innere) direkte Summe einer Familie von UGren, freie abelsche Gruppe, Basis einer freien Gruppe, Rang einer freien Gruppe, UGren endl. erz. freier ab. Gr. vom Rang n sind frei vom Rang $\leq n$, UGren endl. erz. ab. Gr. sind endl. erz., torsionsfrei, Torsionsteil, $A = T(A) \oplus F$

A7: Endlich erzeugte abelsche Gruppen

Stichworte: Torsionsgruppe, p -(Torsions)teil A_p , endl. erz. ab. Torsionsgruppen sind endlich, p -Gruppe, jede ab. Torsionsgruppe ist direkte Summe ihrer p -Teile, jede endl. ab. p -Gruppe ist direkte Summezyklistische p -Gruppen $\neq 0$, Hauptsatz über endl. erz. ab. Gruppen

A8: Auflösbare Gruppen

Stichworte: Normalreihe, Faktorgruppen einer Normalreihe, auflösbare Gruppe, UGren auflösbarer Gruppen sind auflösbar, Kriterium für Auflösbarkeit mit NT N, S_m ist genau für $m \leq 4$ auflösbar, endl. p -Gruppen sind auflösbar, Normalreihen endlicher auflösbarer Gr.

A9: Sylowgruppen

Stichworte: Gruppenoperationen und Klassengleichung bzgl. Konjugation, p -Gruppe, Normalisator, p -Sylowgruppe, Sylowsätze, Beweis der Sylowsätze

Teil II: RINGE (und Moduln)

A10: Ringe: Definitionen und Beispiele

Stichworte: Def. Ring, Kommutativer Ring, Integritätsbereich, Nullring, Körper, Beispiele $R_1 \times \dots \times R_m$ u.a., Nullteiler, \mathbb{Z} -Vielfache von Ringelementen, Einheiten, Einheitengruppe R^\times eines Rings R , Einheiten von $R_1 \times \dots \times R_m$, Schiefkörper

A11: Ideale, Faktorringe, Homomorphismen

Stichworte: Ideal, Ideale in $R_1 \times \dots \times R_m$, Schnitt und Summe von Idealen, Faktoring R/I , Faktorringe von \mathbb{Z} , Ringhomomorphismus, Urbilder und Kerne sind Ideale (Bilder nur bei surj. R-Hom.), Einheiten werden auf Einheiten abgebildet, Homomorphiesatz, Isomorphiesätze, Primring, Charakteristik

A12: Kommutative Ringe, Integrationsbereiche

Stichworte: Chinesischer Restsatz (Ringversion und für \mathbb{Z}), Einheiten in $\mathbb{Z}/(n)$, Eulersche φ -Fkt., Formel für $\varphi(n)$ mit PFZ von n , das von $S \subseteq R$ erzeugte Ideal (S), Hauptideal, maximales Ideal, Primideal, max. Ideale $\not\cong$ prim, Primideale in \mathbb{Z} , Quotientenkörper $\text{Quot}(R)$

A13: Hauptidealbereiche

Stichworte: Hauptidealbereich, euklidischer Integritätsbereich, eukl. IB \Rightarrow HIB, Bsp. für HIBe: \mathbb{Z}, K (aber nicht $\mathbb{Z}[\tau]$), irreduzibel, assoziiert, teilt K , ggT, faktorieller IB, IB mit $(F_1) \& (F_2) \Rightarrow$ faktoriell, Ex. von ggT's in HIB (\cong Bézout), HIB \Rightarrow faktoriell!, $K[\tau]$ faktoriell, im faktoriellen Ring gilt (F_2) , Tafeln in faktoriellen Ringen

A14: Polynomringe

Stichworte: der von x_1, \dots, x_n über A erzeugte Ring $A[x_1, \dots, x_n]$, Polynomring in x_1, \dots, x_n über A , universelle Eigenschaft von Polynomringen, Einsetzungshomomorphismus, Existenz und Eindeutigkeit des Polynomrings, Faktorringe von Polynomringen, Nullstellen und Grad, CRS für $K[\tau]$

A15: Primitive und irreduzible Polynome

Stichworte: primitive Polynome, Grad eines Polynoms, Lemma von Graß über primitive Polynome, A faktoriell und f primativ $\Rightarrow (f \in A[X] \text{ irred.} \Leftrightarrow f \in \text{Quot}(A)[X] \text{ irred.})$, Satz von Graß: A faktoriell $\Rightarrow A[X]$ faktoriell, $A[X]^k = A^k$, Eisensteinsches Irreduzibilitätskriterium

A16: Moduln: Definitionen und Beispiele

Stichworte: R -Modul, Modul-Homomorphismen, direktes Produkt/äußere direkte Summe, Teilmodul, Linksideale/Ideale, Faktormodul, der von Serengte Teilmodul $\langle S \rangle$, zyklischer Modul, Annihilator, Torsionselement, Torsions- $\frac{\text{teil}}{\text{modul}}$, torsionsfrei, innere direkte Summe, frei, Basis, Rang

A17: Endlich erzeugte Moduln über HIBen

Stichworte: freie und endl.erz. Teilmoduln, Zerlegung endl.erz. Moduln in freien und Torsionsmodul, p -Torsionsteil, p -Modul, direkte Summenzerlegung endl.erz. p -Moduln in zyklische, Hauptatz über endl.erz. Moduln über HIBen, Jordansche Normalform und Satz von Cayley als Anwendung

Teil III: KÖRPER

A18: Algebraische Erweiterungen

Stichworte: Charakteristik von K , Primkörper, Körpererweiterung $L|K$, Grad $[L:K]$, endliche Erweiterung, Multiplikativität des Körpergrades, der von x_1, \dots, x_n über K erzeugte Körper $K(x_1, \dots, x_n)$, einfache Erweiterung, primitives El., algebraisches El., Minimalpolynom, alg. Erweiterung

A19: Zerfällungskörper

Stichworte: Erweiterungskörper zu verschiedenen Wurzeln eines Polynoms, Zerfällungskörper, \mathbb{Z}_K von $T^p - 1$ und $T^p - 2$, Fortsetzung eines Isomorphismus zwischen Körpern auf deren \mathbb{Z}_K , Zerfällung von irred. Polynomen über \mathbb{Z}_K in Linearfaktoren, normale Erweiterung

A20: Separabilität

Stichworte: separabel, (formale) Ableitung, separable Erweiterung, Fortsetzung von Körper-Einbettungen auf separable Erweiterungen, perfekter Körper, einfache Erweiterung, primitives Element, Satz vom primitiven Element

A21: Endliche Körper

Stichworte: endl. Ugl. der mult. Gr. eines Körpers sind zyklisch, Frobenius - Endomorphismus, Konstruktion des endlichen Körpers mit p^n Elementen (bis auf Isomorphie), endliche Körper sind perfekt

Teil IV: und zurück (GALOIS THEORIE)

A22: Galoisgruppen

Stichworte: Galoisgruppe, galois, zyklisch/abelsche Galoiserweiterung, Kreisteilungskörper, zyklische Gruppe der n-ten EWen in L, primitive n-te EW, Kreisteilungspolygone, endl. Erweiterungen eines endlichen Körpers sind zyklisch (galois)

A23: Hauptsatz der Galoistheorie

Stichworte: Fixkörper, Zwischenkörper, symmetrische Polynome, elementarsymmetrische Funktionen, Hauptsatz der Galoistheorie: Ugl. der Galoisgruppen entsprechen genau den Zwischenkörpern der Körpererweiterung (und die NT entsprechen den normalen Zwischenkörpern), Anhang: Hauptsatz der Algebra als Anwendung des Hauptsatzes der Galoistheorie

A24: Radikal erweiterungen

Stichworte: Radikal erweiterung, Radikalturm, auflösbar durch Radikale, lineare Unabhängigkeit von Charakteren, (reine) Wurzeln und zyklische Galoiserweiterungen, normale Hülle, normale Hülle separabler Radikal erweiterungen

A25: Auflösbarkeit durch Radikale

Stichworte: Polynom vom Grad n auflösbar durch Radikale \Leftrightarrow Galoisgruppe auflösbar $\Leftrightarrow n \leq 4$

A26: Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Stichworte: Konstruierbar m. Z.u.L. aus $S \subseteq \mathbb{C}$, $\text{Kon}(S)$ als Zwischenkörper von \mathbb{C} / \mathbb{Q} ,
Quadratwurzelturn, Unlösbarkeit des Würfelverdopplungsproblems / Winkeldreiteilung /
Quadratur des Kreises, Konstruierbarkeit des regelmäßigen n -Ecks, Fermatsche Primzahlen

ENDE