Vorlesung Algebra

SoSe'21, hhu
K. Halupczok

Teil I: GRUPPEN

A8: Auflösbare Gruppen

Stichworte: Normalreihe, Faktorgruppen einer Normalreihe, auflösbare Gruppe, UGen auflösbarer Gruppen sind auflösbar, Kriterium für Auflösbarkeit mit NT N, S_n ist genau für $n \leq 4$ auflösbar, endl. p-Gruppen sind auflösbar, Normalreihen endlicher auflösbarer Gr.

8.1. Einleitung: Wir untersuchen Normalreihen und ihre Faktorgruppen. Dies führt zum Begriff einer auflösbaren Gruppe. So ist S_n genau für $n \leq 4$ auflösbar, sowie endliche p-Gruppen. Jede endliche auflösbare Gruppe besitzt eine Normalreihe aus zyklischen Faktoren von Primzahlordnung. Die Ergebnisse dieses Kapitels werden in A25/A26 über Radikalerweiterungen (Galoistheorie) eine besondere Rolle spielen.

8.2. Def.: Sei G Gruppe. Eine Folge $\mathfrak{N}: G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_r = e$ von UG in G heißt Normalreihe für G, falls: $\forall i$: G_i ist NT von G_{i-1} $(1 \leq i \leq r)$.
Die Gruppen G_{i-1}/G_i heißen Faktorgruppen von $\mathfrak{N}$.

8.3 Def.: G heißt auflösbar, falls es eine Normalreihe für G mit lauter abelschen Faktoren gibt.

8.4. Bsp.: Jede ab. Gr. G ist auflösbar: $\mathfrak{N}: G = G_0 \supseteq G_1 = e$.

8.5. Bsp.: S_3 ist auflösbar: $\mathfrak{N}: S_3 \supseteq A_3 \supseteq e$,
die Faktoren sind: $S_3/A_3 \cong C_2$ zyklisch Ordnung 2
$A_3/e \cong A_3$ zyklisch Ordnung 3

8.6. Bsp.: S_4 ist auflösbar: $S_4 \supseteq A_4 \supseteq V \supseteq e$,
die Faktoren sind: $\left.\begin{array}{l} S_4/A_4 \cong C_2 \\ A_4/V \cong C_3 \end{array}\right\}$ zyklisch
$V/e \cong V \cong C_2 \times C_2$ abelsch

8.7 Bsp.: A_5 ist einfach.
$\Rightarrow \mathfrak{N}: A_5 \supseteq e$ ist einzige Normalreihe für A_5
$\Rightarrow A_5$ nicht auflösbar (da A_5 nicht abelsch)

8.8. Satz: UG auflösbarer Gruppen sind auflösbar.

Bew.: Sei $H \subseteq G$, $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_r = e$ NRe mit ab. Faktoren.

Dann: $H = H \cap G \supseteq H \cap G_1 \supseteq \ldots \supseteq H \cap G_r = e$ NR mit ab. Faktoren für H,

denn: $H \cap G_{i-1} \hookrightarrow G_{i-1} \to G_{i-1}/G_i$ hat Kern $H \cap G_i$,

und $H \cap G_{i-1}/H \cap G_i \cong$ UG von G_{i-1}/G_i, ist also abelsch. $\square$

8.9. Satz: Sei G Gruppe, $N \subseteq G$ Normalteiler in G. Dann:

G auflösbar $\Leftrightarrow$ N und G/N auflösbar.

Bew.: „$\Rightarrow$": Sei $\mathfrak{N}: G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_r = e$ NR mit ab. Faktoren für G.

Betr. $\pi: G \twoheadrightarrow G/N =: \bar{G}$.

Dann: $\bar{\mathfrak{N}}: \bar{G} = \pi G \supseteq \pi G_1 \supseteq \ldots \supseteq \pi G_r = \bar{e}$ NR mit ab. Fakt. für $\bar{G}$,

denn:

$$\begin{tikzcd} G_{i-1} \arrow[r, two heads] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & G_{i-1}/G_i \arrow[d, "\Psi"] \\ \pi G_{i-1} \arrow[r, two heads] & \pi G_{i-1}/\pi G_i \end{tikzcd}$$

$\ker \varphi = G_i$,

d.h. $\pi G_{i-1}/\pi G_i \cong G_{i-1}/G_i$ nach Hom.satz,

also abelsch. Also: G/N auflösbar.

Ferner: N auflösbar nach 8.8.

„$\Leftarrow$": Seien $\mathfrak{N}: N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_r = e$,

$\mathfrak{N}': \bar{G} = \bar{G}_0 \supseteq \bar{G}_1 \supseteq \ldots \supseteq \bar{G}_s = \bar{e}$

NR für N und $\bar{G} := G/N$ mit ab. Faktoren.

Sei $\pi: G \twoheadrightarrow \bar{G} = G/N$ die Projektion nach N.

Dann: $G = \pi^{-1}\bar{G} \supseteq \pi^{-1}\bar{G}_1 \supseteq \ldots \supseteq \pi^{-1}\bar{G}_{s-1} \supseteq \pi^{-1}\bar{G}_s = N \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_r = e$

ist NR mit ab. Faktoren.

(Beachten: $\bar{G}_{i-1}/\bar{G}_i \cong \pi^{-1}(G_{i-1})/\pi^{-1}(G_i)$, s.o.). $\square$

8.10. Kor.: S_n auflösbar $\Leftrightarrow$ $n \leq 4$.

Bew.: Es ist: $n \geq 5 \underset{A5.25}{\Leftrightarrow} A_n$ nicht auflösbar, da A_n einfach und nicht abelsch

$\underset{8.9.}{\Leftrightarrow} S_n$ nicht auflösbar. $\square$

8.11. **Satz:** Sei $p \in \mathbb{N}$ prim, G endl. p-Gruppe, d.h. $\#G = p^e$. Dann ist G auflösbar.

Bew.: VI nach $n := \#G$: $n = 1$: ✓

$n > 1$: Nach A3.18: G hat Zentrum $Z(G) \neq e$.

$Z(G)$ ist als ab. Gruppe auflösbar,

$G/Z(G)$ ist nach IV auflösbar.

$\overset{8.9.}{\Rightarrow}$ G ist auflösbar. $\square$

8.12. **Satz:** Jede endl. auflösbare Gruppe hat eine NR aus zykl. Faktoren von Primzahlordnung.

Bew.: VI nach $n := \#G$: $n = 1$: ✓

$n > 1$: Sei $G' \subsetneq G$ NT mit G/G' abelsch,

ist möglich, da NR $\mathfrak{N}: G \supsetneq G_1 \supsetneq \dots$ mit ab. Faktoren ex.

Wähle maximale UG $\bar{G}_0$ von $\bar{G} := G/G'$ mit $\bar{G}_0 \neq \bar{G}$.

Dann: $\bar{G}/\bar{G}_0$ ist zyklisch von Primzahlordnung. ⌜HS für $\bar{G}$⌟

Sei $\pi: G \twoheadrightarrow \bar{G} = G/G'$ die Projektion nach G'.

Dann gilt: $\pi^{-1}\bar{G} = G \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Faktor zyklisch} \\ \text{von Primzahlordnung}}}{\supsetneq} G_1 := \pi^{-1}\bar{G}_0 \underbrace{\supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq e}_{\text{nach IV}}$.

$\square$