Vorlesung Algebra

SoSe'21, hhu
K. Halupczok

Teil I: GRUPPEN

A7: Endlich erzeugte abelsche Gruppen

Stichworte: Torsionsgruppe, p-(Torsions)teil A_p, endl. erz. ab. Torsionsgruppen sind endlich, p-Gruppe, jede ab. Torsionsgruppe ist direkte Summe ihrer p-Teile, jede endl. ab. p-Gruppe ist direkte Summe zyklische p-Gruppen $\neq 0$, Hauptsatz über endl. erz. ab. Gruppen

---

7.1. Einleitung: Wir besprechen Torsionsgruppen und p-Torsionsteile abelscher Gruppen. Endlich erzeugte abelsche Torsionsgruppen sind endlich. Jede abelsche Torsionsgruppe ist direkte Summe ihrer p-Teile. Da jede endliche abelsche p-Gruppe direkte Summe zyklischer p-Gruppen ist, erhalten wir den Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen: der Zerlegungssatz, mit dem wir alle endlich erzeugten abelschen Gruppen klassifizieren können.

7.2. Bem.: d heißt ggT von $r_1,\dots,r_n \in \mathbb{Z}$, falls:
(i) $\forall i: d \mid r_i$, (ii) $\forall d': (\forall i: d' \mid r_i) \Rightarrow d' \mid d$.
d ist bis auf das VZ eind. best.

7.3. Lemma: Seien $r_1,\dots,r_n \in \mathbb{Z}$, d sei ggT$(r_1,\dots,r_n)$. Dann:
$\exists s_1,\dots,s_n \in \mathbb{Z}: d = s_1 r_1 + \dots + s_n r_n$.
("Satz von Bézout", die $s_1,\dots,s_n$ heißen Bézout-Koeffizienten)

Bew.: Sei $A := \mathbb{Z}r_1 + \dots + \mathbb{Z}r_n$, ist UG von $\mathbb{Z}$, also $A = \mathbb{Z}d'$.
$\forall i: d' \mid r_i \Rightarrow d' \mid d$.
Ex. $s_1,\dots,s_n \in \mathbb{Z}: s_1 r_1 + \dots + s_n r_n = d' \Rightarrow d \mid d'$.
Somit: $d \mid d'$ und $d' \mid d \Rightarrow d' = \pm d$. □

7.4. Def.: Sei A ab. Gruppe.
* A heißt Torsionsgruppe, falls $T(A) = A$, d.h. jedes El. hat endl. Ordnung.
* Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. $A_p := \{a \in A;\ \exists e \in \mathbb{N}: p^e a = 0\}$ heißt p-(Torsions-)teil von A.

7.5. Bem.: A_p ist UG von A (und somit NT).
Bew.: $a, b \in A_p$, d.h. $p^e a = 0 = p^f b \Rightarrow p^{e+f}(a-b) = p^f(p^e a) - p^e(p^f b) = 0$
$\Rightarrow a - b \in A_p$. □

7.6. **Bem.:** $p^e a = 0 \Rightarrow \operatorname{ord}(a)$ ist Potenz von p.

7.7. **Bem.:** Sei $r \in \mathbb{Z}$, $p \nmid r$. Dann: $\varphi : A_p \to A_p$
$a \mapsto ra$ ist Automorphismus.

Bew.: inj.: Sei $ra = 0 \Rightarrow p^e = \operatorname{ord}(a) \mid r \Rightarrow p^e = 1 \Rightarrow a = 0$.

surj.: Sei $a \in A_p$, $\operatorname{ord}(a) = p^e$. Nach 7.3 ex. $u, v \in \mathbb{Z} : 1 = up^e + vr$
$\Rightarrow a = 1 \cdot a = (up^e + vr)a = u\underbrace{(p^e a)}_{=0} + r(va) = r \cdot (va)$. □

7.8. **Bem.:** Sei $A = \mathbb{Z}a \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$, $n = r_1 r_2$ mit $r_1, r_2 > 1$ teilerfremd.
Dann: $\mathbb{Z}a = \mathbb{Z}(r_1 a) \oplus \mathbb{Z}(r_2 a)$ $\quad (\cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}r_2 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}r_1)$.

Bew.: * $\mathbb{Z}a = \mathbb{Z}(r_1 a) + \mathbb{Z}(r_2 a)$: „$\supseteq$" trivial, „$\subseteq$": Nach 7.3
ex. $s_1, s_2 \in \mathbb{Z} : 1 = s_1 r_1 + s_2 r_2 \Rightarrow a = 1a = s_1(r_1 a) + s_2(r_2 a)$. ✓

* $\mathbb{Z}(r_1 a) \cap \mathbb{Z}(r_2 a) = 0$:
Sei $b \in \mathbb{Z}(r_1 a) \cap \mathbb{Z}(r_2 a)$, also $b = s_1 r_1 a = s_2 r_2 a$.
$\Rightarrow r_2 b = s_1 \underbrace{r_1 r_2 a}_{=0} = s_2 r_2^2 a \Rightarrow r_1 r_2 \mid s_2 r_2^2$
$\Rightarrow r_1 \mid s_2$, da $\operatorname{ggT}(r_1, r_2) = 1$, etwa $s_2 = s r_1$.
$\Rightarrow b = s_2 r_2 a = s r_1 r_2 a = 0$. □

7.9. **Bem.:** Endlich erz. ab. Torsionsgruppen sind endlich.

Bew.: Sei $A = \mathbb{Z}a_1 + \ldots + \mathbb{Z}a_m$, $m_i := \operatorname{ord}(a_i)$.
$\Rightarrow A = \{r_1 a_1 + \ldots + r_m a_m ;\ 0 \le r_i < m_i,\ 1 \le i \le m\}$.
$\Rightarrow \# A \le \prod_{i=1}^{m} m_i$. □

7.10 **Bsp.:** Betr. $\langle a, b \rangle$ mit $a^2 = b^2 = e$, nicht abelsch: endl. erz., nicht endlich.

7.11. **Def.:** Eine ab. Gruppe A heißt p-Gruppe ($p \in \mathbb{N}$ prim)
$:\Leftrightarrow \forall a \in A : \operatorname{ord}(a)$ ist Potenz von p.

$\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} \text{ prim}\}$ sei die Menge der positiven Primzahlen.

7.12 **Satz:** Jede ab. Torsionsgruppe A ist direkte Summe ihrer p-Teile: $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p$.

Bew.: * $A = \sum_{p\in\mathbb{P}} A_p$:

Sei $a \in A$, $1 < \mathrm{ord}(a) = r = p_1^{e_1} \cdots p_m^{e_m}$ die PFZ (p_i paarw. versch. $\in \mathbb{P}$, $e_i \geq 1$).

Sei $r_i := p_i^{-e_i} r \Rightarrow \mathrm{ord}(r_i a) = p_i^{e_i}$, d.h. $r_i a \in A_{p_i}$ für $1 \leq i \leq m$.

Da die r_i keinen gem. Teiler $\neq \pm 1$ haben, ex. $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{Z}$: $1 = s_1 r_1 + \dots + s_m r_m$.

Somit: $a = 1a = s_1 \underbrace{(r_1 a)}_{\in A_{p_1}} + \dots + s_m \underbrace{(r_m a)}_{\in A_{p_m}} \in \sum_{p\in\mathbb{P}} A_p$

* $A_q \cap \sum_{p\in\mathbb{P}\setminus\{q\}} A_p = 0$:

Sei $a = a_{p_1} + \dots + a_{p_m} \in A_q$, die $p_i \in \mathbb{P}\setminus\{q\}$. Ex. $e_1, \dots, e_m$: $p_i^{e_i} a_{p_i} = 0$, $1 \leq i \leq m$.

Dann: $r := \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i} \Rightarrow ra = ra_{p_1} + \dots + ra_{p_m} = 0 + \dots + 0 = 0$.

Bem. 7.7 $\Rightarrow$ $A_q \to A_q$, $a \mapsto ra$ Autom., da $q \nmid r$. Somit: $a = 0$. □

7.13 **Lemma:** Sei $p \in \mathbb{P}$, A endl. ab. p-Gruppe, $a_0 \in A$ mit $\mathrm{ord}(a_0) = p^e$ maximal.

Dann: $\forall b \in A/\mathbb{Z}a_0 =: B \ \exists a \in A: \pi(a) = b$ und $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b)$,

dabei bezeichnet $\pi: A \twoheadrightarrow A/\mathbb{Z}a_0$ die Projektion nach $\mathbb{Z}a_0$.

Bew.: Sei $0 \neq b \neq 0$, $p^f = \mathrm{ord}(b)$.

$\Rightarrow f \leq e$ (wegen: $b = \pi(a')$, $p^e a' = 0 \Rightarrow 0 = \pi(p^e a') = p^e b$).

Sei $a' \in A$: $\pi(a') = b$.

$\Rightarrow 0 = p^f b = p^f(\pi a') = \pi(p^f a') \Rightarrow p^f a' \in \ker \pi = \mathbb{Z}a_0$,

sei also $p^f a' = r a_0$ mit $r \in \mathbb{Z}$. Dann:

$0 = p^e a' = p^{e-f} p^f a' = p^{e-f} r a_0$ nach Def. von e.

$\Rightarrow p^e \mid p^{e-f} \cdot r \Rightarrow p^f \mid r \Rightarrow$ sei $r = p^f \cdot s$.

$\Rightarrow a := a' - s a_0$ genügt, denn:

$\begin{cases} \pi a = \pi a' - \pi(s a_0) = \pi a' = b, & \text{nach Def. von } \pi, \\ p^f a = p^f a' - \underbrace{p^f s}_{r} a_0 = 0, & \text{nach Def. von } r. \end{cases}$ □

7.14. **Satz:** Sei $p \in \mathbb{P}$, A endl. ab. p-Gruppe ($\#A = p^e$). Dann ist A direkte Summe zyklischer p-Gruppen $\neq 0$: $A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}a_i$, $\mathbb{Z}a_i \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{e_i}$, n ist eind. best., $e_1, \dots, e_n$ bis auf Reihenfolge eind. best.

Bew.: Ex.: VI nach $\#A$: $\#A = 1$: ✓

$\#A > 1$: Sei $a_0 \in A$ von max. Ordnung, $B := A/\mathbb{Z}a_0$, $\pi: A \twoheadrightarrow B$.

IV auf B: $B = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}b_i$, die $b_i \neq 0$, $\mathbb{Z}b_i \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{e_i}$.

7.13 $\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_m \in A: \pi a_i = b_i$, $\operatorname{ord}(a_i) = \operatorname{ord}(b_i)$, $1 \le i \le m$.

Dann: $A = \bigoplus_{i=0}^{m} \mathbb{Z}a_i$: $\quad * A = \sum_{i=0}^{m} \mathbb{Z}a_i$ ✓

$*$ Ferner direkt: Sei $r_0 a_0 + r_1 a_1 + \dots + r_m a_m = 0$

$\Rightarrow 0 = \pi(r_0 a_0 + \dots + r_m a_m) = \underbrace{\pi(r_0 a_0)}_{=0} + r_1 b_1 + \dots + r_m b_m$

$\Rightarrow r_i b_i = 0$, $1 \le i \le m$

$\Rightarrow \operatorname{ord}(b_i) \mid r_i \Rightarrow \operatorname{ord}(a_i) \mid r_i \Rightarrow r_i a_i = 0$, $1 \le i \le m$

$\Rightarrow r_0 a_0 = 0$.

Somit: $A = \bigoplus_{i=0}^{m} \mathbb{Z}a_i$, $\mathbb{Z}a_i \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{e_i}$.

Eind.: VI nach $\#A$: $\#A = 1$: $A = \mathbb{Z}e \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^0$ ✓

$\#A > 1$: Sei: $A = \bigoplus_{i=1}^{n} C_{p^{k_i}}$, mit $C_{p^{k_i}} = \mathbb{Z}a_i \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{k_i}$.

Sei OE: $k_i = 1 \Leftrightarrow 1 \le i < s$.

Betr. $A \to pA$:

$\Rightarrow pA = \underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_{s-1} \oplus \underbrace{C_{p^{k_s - 1}} \oplus \dots \oplus C_{p^{k_n - 1}}}_{\text{IV: eind. } =: B}$

$\Rightarrow \underbrace{C_{p^{k_1}} \oplus \dots \oplus C_{p^{k_{s-1}}}}_{C = C_p \oplus \dots \oplus C_p,\ s-1}$ eind.,

denn: jedes El. hat Ordnung p,

$\#A$ fest, $\#B$ fest

$\Rightarrow s-1$ fest, also eind. $\square$

Zusammenfassung:

7.15. **Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen:** Jede endl. erz. ab. Gr. A ist eind. von der Form $A = F \oplus T(A) \cong \mathbb{Z}^m \oplus \left(\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} T(A)_p\right)$

$\cong \mathbb{Z}^m \oplus \left(\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{i=1}^{n_p} \underbrace{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{e_i(p)}}_{\text{zykl. } p\text{-Gruppe}}\right)$ für gewisse Primzahlpotenzexponenten $e_i(p) > 0$.