Vorlesung Algebra

SoSe'21, hhu
K. Halupczok

Teil I: GRUPPEN

A4: Gruppenhomomorphismen

Stichworte: Def. Gruppenhomomorphismus, Iso-, Endo- und Automorphismus, jede Gruppe ist $\cong$ einer Permutationsgruppe, Homomorphiesatz / Isomorphiesätze für Gruppen, alle zyklischen Gruppen und UGen zyklischer Gruppen

---

4.1. Einleitung: Wir führen Gruppenhomomorphismen ein. Eine UG von $\mathrm{Perm}(X)$ zu irgendeiner Menge X heißt Permutationsgruppe, und wir zeigen, dass jede Gruppe isomorph zu einer Permutationsgruppe ist. Wir zeigen (analog zum Homomorphiesatz für VRe) den Homomorphiesatz für Gruppen und die Isomorphiesätze. Als Anwendung können wir alle zyklischen Gruppen und deren UGen "klassifizieren".

4.2. Def.: Seien G, H Gruppen. $\varphi: G \to H$ Homomorphismus $:\Leftrightarrow$
$$\forall a, b \in G: \quad \varphi(a \circ_G b) = \varphi(a) \circ_G \varphi(b).$$

4.3 Bem.: $\varphi(e_G) = e_H$, da $\forall a \in G: \varphi(e_G) \circ_H \varphi(a) = \varphi(e_G \circ_G a) = \varphi(a)$

4.4. Def.: $\varphi: G \to H$ Hom. heißt Isomorphismus $:\Leftrightarrow$
$$\exists\, \Psi: H \to G \text{ Hom.}: \quad \varphi \circ \Psi = id_H \quad \text{und} \quad \Psi \circ \varphi = id_G.$$

4.5. Bem.: Sei φ Hom., $\varphi: G \to H$. Dann:
$$\varphi \text{ Isom.} \Leftrightarrow \varphi \text{ bijektiv} \quad (\Leftrightarrow \ker \varphi = \{e\} \wedge \operatorname{im} \varphi = H).$$

Bew.: "$\Rightarrow$": $\forall h \in H: \; h = \varphi \circ \Psi(h) = \varphi(\Psi(h))$, d.h. φ surjektiv.
$$\forall g_1, g_2 \in G: \; \varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Rightarrow \Psi \circ \varphi(g_1) = \Psi \circ \varphi(g_2) \Rightarrow g_1 = g_2,$$
d.h. φ injektiv.

"$\Leftarrow$": $\forall h \in H \; \exists!\, g \in G: \; \varphi(g) = h$, daher setze $\Psi(h) := g$, $\Psi: H \to G$.
Dabei $\varphi \circ \Psi = id_H$, $\Psi \circ \varphi = id_G$. Ferner Ψ Hom., denn:
$$\forall h_1, h_2 \in H: \; \Psi(h_1 \circ_H h_2) = g_1 \circ_G g_2 = \Psi(h_1) \circ_G \Psi(h_2)$$
mit $\varphi(g_1) = h_1$, $\varphi(g_2) = h_2$,
da $\varphi(g_1 \circ_G g_2) = \varphi(g_1) \circ_H \varphi(g_2) = h_1 \circ_H h_2$. $\square$

4.6. **Def.:** Homomorphismen (bzw. Isomorphismen) $\varphi: G \to G$ heißen Endomorphismen (bzw. Automorphismen).

4.7. **Bez.:** $\mathrm{Hom}(G,H) := \{\varphi: G \to H \text{ Hom.}\}$, $\mathrm{End}(G) := \{\varphi: G \to G \text{ Hom.}\}$,
$\mathrm{Iso}(G,H) := \{\varphi: G \to H \text{ Isom.}\}$, $\mathrm{Aut}(G) := \{\varphi: G \to G \text{ Isom.}\}$,
d.h. $\mathrm{End}(G) = \mathrm{Hom}(G,G)$ und $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Iso}(G,G)$.

4.8. **Bsp.:** $\varphi_1: G \to G$, $a \mapsto e$ und $\varphi_2: G \to G$, $a \mapsto a$ sind beide Homomorphismen:
$\varphi_1(ab) = e = \varphi_1(a)\varphi_1(b)$,
$\varphi_2(ab) = ab = \varphi_2(a)\varphi_2(b)$.

4.9. **Bsp.:** $\left.\begin{array}{l}\varphi: G \to G' \\ \varphi': G' \to G''\end{array}\right\}$ Hom. $\Rightarrow \varphi'\varphi: G \to G''$ ist Hom.
Denn: $\varphi'\varphi(ab) = \varphi'(\varphi(a)\varphi(b)) = \varphi'\varphi(a)\varphi'\varphi(b)$.

4.10. **Bsp.:** $\mathrm{Aut}(G)$ ist UG von $\mathrm{Perm}\,G$:
$g, h \in \mathrm{Aut}(G) \Rightarrow gh^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$.

4.11. **Bsp.:** Sei A abelsche Gruppe, $n \in \mathbb{N}$. $\varphi: A \to A$, $a \mapsto a^n$ ist Endomorphismus.
Bew.: $\forall a,b \in A$: $(ab)^n = a^n b^n$, da A abelsch, VI nach $n \in \mathbb{N}$:
$n=0$: e ✓, $n \to n+1$: $(ab)^{n+1} = (ab)^n ab = a^n(b^n a)b$
$\underset{A \text{ abelsch}}{=} a^n(ab^n)b = a^{n+1}b^{n+1}$. □

4.12. **Bsp.:** $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \mapsto \exp(a)$
ist inj. Hom., $\mathrm{im}\,\varphi = \mathbb{R}^*_{>0}$.

Umkehrabb.:
$\varphi^{-1}: \mathbb{R}^*_{>0} \to \mathbb{R}$, $b \mapsto \ln b$ (log zur Basis e)
(Hom.)

4.13. **Bsp.:** K sei Körper, V sei K-VR, $\dim V = n$.
Sei $\mathcal{A}: (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V.
Dann: $\mathrm{Aut}_K(V) \longrightarrow GL(n,K)$
$f \longmapsto M_{\mathcal{A}}(f)$ $\hat{=}$ Matrixdarst. von f bzgl. Basis $\mathcal{A}$
$M_{\mathcal{A}}(fg) = M_{\mathcal{A}}(f)\, M_{\mathcal{A}}(g)$ ist Gruppenisomorphismus.

4.14. Bsp.: $\varphi: GL(n,K) \to K^*$
$A \mapsto \det A$,
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ist surj. Hom.
mit $\ker \varphi = SL(n,K)$. („spezielle lineare Gruppe", $\det = 1$)

4.15. Bsp.: Seien $G_1, \dots, G_n$ Gruppen, $\pi_i : G_1 \times \dots \times G_n \to G_i$,
$(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_i$
sind surj. Hom. („Projektionen")

4.16. Bsp.: $\ell: G \to \mathrm{Perm}(G)$
$a \mapsto \ell_a$ (Linkstranslation: $\ell_a(b) := ab$)
ist inj. Hom., denn: Hom.: $\ell_{a_1 a_2} = \ell_{a_1} \circ \ell_{a_2}$
inj.: $\ell_a = id_G \Rightarrow \ell_a(e) = e = ae \Rightarrow a = e$.

4.17. Def.: $G \subseteq \mathrm{Perm}(X)$ UG, dann heißt G Permutationsgruppe.

4.18. Satz: Jede Gruppe G ist isomorph einer Permutationsgruppe.
Bew.: Nach Bsp. 4.16: $G \cong \mathrm{im}(\ell) \subseteq \mathrm{Perm}(G)$, und $\mathrm{im}(\ell)$ UG, da ℓ inj. $\square$

4.19. Bsp.: Sei G Gruppe, X Menge, $T: G \times X \to X$
$(a,x) \mapsto T_a(x)$ Abb.
T Gruppenop. $\Leftrightarrow$ $\varphi: G \to \mathrm{Perm}(X)$, $a \mapsto T_a$ Gruppenhom.

Bew.: „$\Rightarrow$": $\varphi(ab) = T_{ab} = T_a \circ T_b = \varphi(a) \circ \varphi(b)$.
„$\Leftarrow$": $T_e(x) = \varphi(e)(x) = id_X(x) = x$,
$T_{ab} = \varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b) = T_a \circ T_b$. $\square$

4.20. Bsp.: Sei $a \in G$. Die Konjugation mit a: $\eta_a : G \to G$, $b \mapsto aba^{-1}$
ist Automorphismus von G,
denn $\eta_a(bc) = abca^{-1} = (aba^{-1})(aca^{-1}) = \eta_a(b)\eta_a(c)$,
$\eta_a \circ \eta_{a^{-1}}(b) = a(a^{-1}ba)a^{-1} = b = \eta_{a^{-1}} \circ \eta_a(b)$.

4.21. Homomorphiesatz:

Vor.: G Gruppe, $N \subseteq G$ NT.

Beh.: (i) $\pi : G \to G/N$ „Projektion" zu N
$a \mapsto aN$ ist surj. Gruppenhom., $\ker \pi = N$.

(ii) „Universelle Eigenschaft":
$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(G,H)$, H Gruppe, $N \subseteq \ker \varphi$,
$\exists!\ \bar\varphi \in \mathrm{Hom}(G/N, H)$: $\bar\varphi \circ \pi = \varphi$.

$$\begin{tikzcd} N \subseteq \ker\varphi & & \\ G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & H & \\ G/N \arrow[ur, dashed, "\bar\varphi"'] & & \end{tikzcd}$$

Zusatz: $\left\{ \begin{array}{ll} (\alpha) & \mathrm{im}\,\bar\varphi = \mathrm{im}\,\varphi \\ (\beta) & \bar\varphi \text{ inj.} \Leftrightarrow \ker\varphi = N \end{array} \right\} \Rightarrow (\gamma)\ \boxed{\mathrm{im}\,\varphi \cong G/\ker\varphi}$
($\bar\varphi$ Isom.)

Bew.: (i) π Hom.: $\pi(ab) = (ab)N = (aN)(bN) = \pi(a)\pi(b)$, surj. ✓
$\ker\pi = N$: $aN = \pi(a) = e = eN = N \Leftrightarrow a \in N$.

(ii) Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,H)$, $N \subseteq \ker\varphi$.
Def. $\bar\varphi(aN) := \varphi(a)$, dann $\bar\varphi \circ \pi = \varphi$.

* wohldef.: $aN = bN \Rightarrow \boxed{a^{-1}b \in N \subseteq \ker\varphi}$
$\Rightarrow e = \varphi(a^{-1}b) = (\varphi(a))^{-1}\varphi(b) \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$.

* eind. nach Def.

* Hom.: $\bar\varphi((aN)(bN)) = \bar\varphi((ab)N) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
$= \bar\varphi(aN)\,\bar\varphi(bN)$.

(α) $\mathrm{im}\,\varphi = \mathrm{im}\,\bar\varphi$ nach Def., da π surj.

(β) „$\Rightarrow$": $a \in \ker\varphi \Leftrightarrow e = \varphi(a) = \bar\varphi \circ \pi(a) = \bar\varphi(aN)$
$\overset{\bar\varphi \text{ inj.}}{\Rightarrow} aN = N \Rightarrow a \in N$.

„$\Leftarrow$": $e_H = \bar\varphi(aN) = \bar\varphi(\pi(a)) = \varphi(a) \Rightarrow a \in N \Rightarrow aN = N \Rightarrow \bar\varphi$ inj.

(γ)
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & \mathrm{im}\,\varphi \subseteq H & \\ G/\underbrace{\ker\varphi}_{N} \arrow[ur, dashed, "\bar\varphi"'] & & \end{tikzcd}$$

$\left.\begin{array}{l} \bar\varphi \text{ surj., da } \varphi \text{ surj. } (\alpha) \\ \bar\varphi \text{ inj., da } \ker\varphi = N\ (\beta) \end{array}\right\}$ $\mathrm{im}\,\varphi \cong G/\ker\varphi$ mit Isom. $\bar\varphi$.

$\square$

4.22. Satz: Vor.: G Gruppe, $N \trianglelefteq G$ NT, $\pi: G \to G/N =: \bar{G}$ die Projektion zu N.

$\mathcal{U} := \{H \subseteq G \text{ UG};\ N \subseteq H\}$, $\bar{\mathcal{U}} := \{\bar{H} \subseteq \bar{G} \text{ UG}\}$,

$\varphi: \mathcal{U} \to \bar{\mathcal{U}}$, $H \mapsto \pi(H)$, $\qquad \Psi: \bar{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$, $\bar{H} \mapsto \pi^{-1}(\bar{H})$.

Beh.: (i) φ, Ψ zueinander inverse Bijektionen zwischen $\mathcal{U}$ und $\bar{\mathcal{U}}$.

(ii) $\bar{M} \in \bar{\mathcal{U}}$ NT in $\bar{G} \iff M := \pi^{-1}(\bar{M}) \in \mathcal{U}$ NT in G.

Dann: $G/M \cong \bar{G}/\bar{M} = (G/N)/(M/N)$. "2. Isomorphiesatz"

1. Isomorphiesatz: Ü

Bew.: (i) * $H = \pi^{-1}(\pi(H)) = \Psi \circ \varphi(H) \quad \forall H \in \mathcal{U}$:

„$\subseteq$": $a \in H \Rightarrow \pi(a) \in \pi(H) \Rightarrow a \in \pi^{-1}(\pi(H))$.

„$\supseteq$": $a \in \pi^{-1}(\pi(H)) \Rightarrow \pi(a) \in \pi(H)$

$\Rightarrow \exists b \in H: \pi(a) = \pi(b)$

$\Rightarrow e = (\pi a)(\pi b)^{-1} = \pi(ab^{-1})$

$\Rightarrow ab^{-1} \in \ker \pi = N \subseteq H$, also $c := ab^{-1} \in H$

$\Rightarrow a = cb \in H$.

* $\bar{H} = \pi(\pi^{-1}(\bar{H})) = \varphi \circ \Psi(\bar{H}) \quad \forall \bar{H} \in \mathcal{U}$:

„$\subseteq$": $\bar{a} \in \bar{H}$, sei $\pi a = \bar{a} \Rightarrow a \in \pi^{-1}(\bar{H}) \Rightarrow \bar{a} = \pi a \in \pi(\pi^{-1}(\bar{H}))$.

„$\supseteq$": $\bar{a} \in \pi(\pi^{-1}(\bar{H}))$. Dann ex. $\underbrace{b \in \pi^{-1}(\bar{H})}_{\bar{a} = \pi b \in \bar{H}}$ mit $\pi b = \bar{a}$.

(ii) * Sei $M \subseteq G$ NT, $M \in \mathcal{U}$.

$\bar{b} \in \pi(M) = \bar{M}$, $\bar{a} \in \bar{G}$. Zeigen: $\bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1} \overset{!}{\in} \bar{M}$ $(\Rightarrow \bar{a}\bar{M}\bar{a}^{-1} = \bar{M})$.

Sei $a \in G$, $b \in M$: $\bar{a} = \pi a$, $\bar{b} = \pi b$.

$\Rightarrow aba^{-1} \in M$, da M NT

$\Rightarrow (\pi a)(\pi b)(\pi a)^{-1} \in \pi(M) = \bar{M}$.

* Sei $\bar{M}$ NT in $\bar{G} \Rightarrow \forall a \in G\ \forall b \in M: (\pi a)(\pi b)(\pi a)^{-1} = \pi(aba^{-1}) \in \bar{M}$

$\Rightarrow aba^{-1} \in \pi^{-1}(\bar{M}) = M \Rightarrow aMa^{-1} = M$.

* $$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, two heads, "\bar{\varphi}"] & \bar{G} \arrow[d] \\ G/M \arrow[r, dashed, "\bar{\bar{\varphi}}"] & \bar{G}/\bar{M} \end{tikzcd}$$

$\bar{\varphi} := \varphi \circ \pi$ surj., $\ker \bar{\varphi} = M$:

$a \in \ker \bar{\varphi} \iff \bar{\varphi}(a) = (eN)\bar{M} = \varphi(aN) = (aN)\bar{M}$

$\iff aN \in \bar{M} = M/N \iff a \in M$.

Homomorphiesatz $\Rightarrow \bar{\bar{\varphi}}$ Isom. $\square$

4.23 **Satz:** G zyklische Gruppe. Dann: $\begin{cases} G \cong \mathbb{Z}, & \#G = \infty, \\ G \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}r, & \#G = r \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Bew.: Sei $G = \langle a \rangle$, dann $\varphi : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow G$
$n \mapsto a^n$ surj. Gruppenhom.

$\overset{4.21}{\Rightarrow} G \cong \mathbb{Z}/\ker\varphi \begin{cases} = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}r, & \text{falls } \ker\varphi = \mathbb{Z}r \text{ mit } r = \#G \in \mathbb{N}, \\ \cong \mathbb{Z}, & \text{falls } \ker\varphi = \{0\} \text{ mit } \#G = \infty. \end{cases}$ $\square$

4.24 **Satz (UG von zyklischen Gruppen):**

(i) $\mathbb{Z}$: UG von $\mathbb{Z}$ sind $\mathbb{Z}r$ $(r \in \mathbb{N}_0)$, alle zyklisch (vgl. A2.6).
Es gilt: $\mathbb{Z}r \subseteq \mathbb{Z}s \Leftrightarrow r \in \mathbb{Z}s \Leftrightarrow s \mid r$.

(ii) $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}r$: Betr. $\pi : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/\mathbb{Z}r$.
Sei $H \subseteq \mathbb{Z}/\mathbb{Z}r$ eine UG.
$\Rightarrow \pi^{-1}(H)$ UG von $\mathbb{Z}$, d.h. zyklisch, also $\pi^{-1}(H) = \mathbb{Z}s$, $s \in \mathbb{N}_0$.
$\Rightarrow H = \pi(\pi^{-1}(H)) = \pi(\mathbb{Z}s) = \mathbb{Z}s/\mathbb{Z}r$ zyklisch,
also: $H \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}t$, $t \in \mathbb{N}_0$,
dabei: $t \mid r$, denn $H = \langle s + \mathbb{Z}r \rangle$,
$t = \#H = \operatorname{ord}(s + \mathbb{Z}r) \mid r$.